Théorème de THALES, TRIANGLES SEMBLABLES, HOMOTHETIES

I – Théorème de Thalès

Rappel admise

Pour passer du nombre a au nombre b, on multiplie par $\frac{b}{a}$.

$$a \xrightarrow{\times \frac{b}{a}} b \qquad \textit{départ} \xrightarrow{\times \frac{arrivée}{départ}} \textit{arrivée}$$

Exemples

$$5 \xrightarrow{\times 3} 15 \qquad 5 \xrightarrow{\times 13} 65 \qquad 5 \xrightarrow{\times \frac{645}{5} \text{ ou } \times 129} 645 \qquad 5 \xrightarrow{\times \frac{7}{5}} 7 \qquad 7 \xrightarrow{\times \frac{3}{7}} 3$$

Comment identifier que deux triangles sont homothétiques l'un de l'autre ?

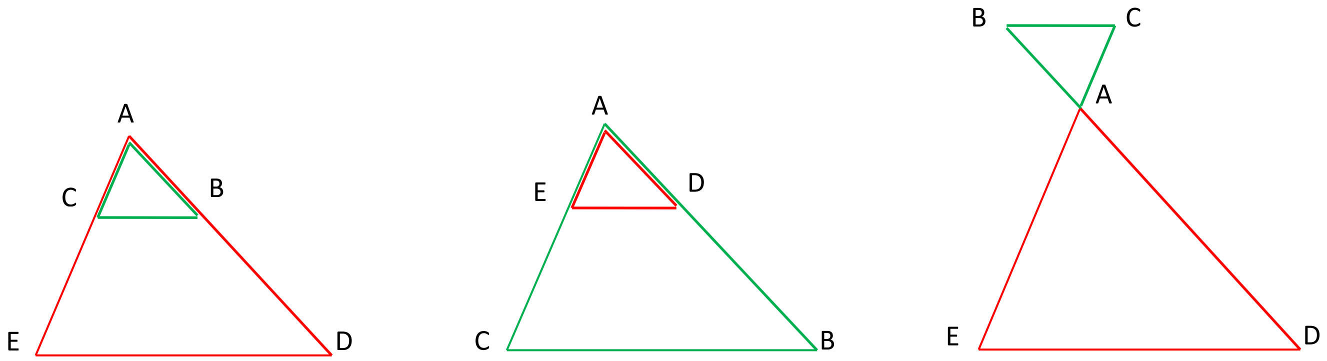
Soit ABC un triangle.

Si D∈(AB) et E∈(AC) et (BC)//(DE) alors ADE et ABC sont homothétiques l'un par rapport à l'autre.

Théorème de Thalès

Soit ABC un triangle.

Si D∈(AB) et E∈(AC) tels que (BC)//(DE) alors $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$ $\quad$ $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$



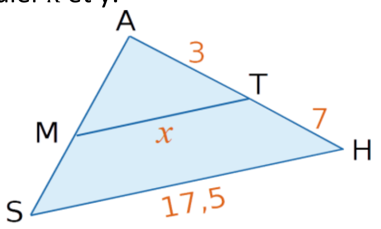
"Démonstration"

Les trois quotients intervenant dans le théorème sont les coefficients d'agrandissement/réduction permettant de passer de ABC à ADE.

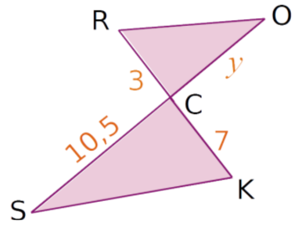
Exemples

Sur les figures ci-dessous, les distances sont en centimètres.

Calculer x et y.



(MT)//(SH)



(RO)//(SK)

Comme A, T, H et A, M, S sont alignés et comme (MT)//(HS), d'après le théorème de Thalès

$$\frac{AT}{AH} = \frac{AM}{AS} = \frac{MT}{SH}$$

$$\frac{3}{10} = \frac{AM}{AS} = \frac{x}{17,5}$$

$$x = \frac{3 \times 17,5}{10} = 5,25 \text{ cm}$$

Comme R, C, K et O, C, S sont alignés et comme (RO)//(KS), d'après le théorème de Thalès

$$\frac{CR}{CK} = \frac{CO}{CS} = \frac{RO}{SK}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{y}{10,5} = \frac{RO}{SK}$$

$$y = \frac{3 \times 10,5}{7} = 4,5 \text{ cm}$$

Propriété réciproque de Thalès - admise

Si A, B, D et A, C, E sont alignés dans cet ordre et si

$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$

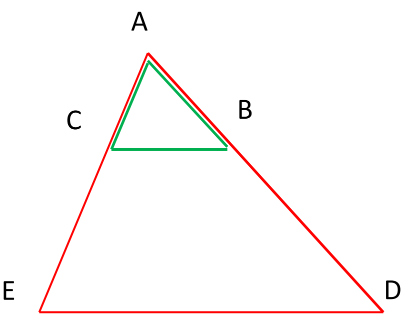
alors **(BC)//(DE)**

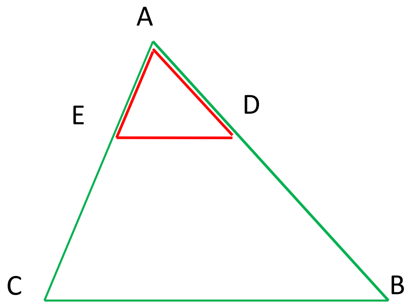
Propriété contraposée de Thalès - admise

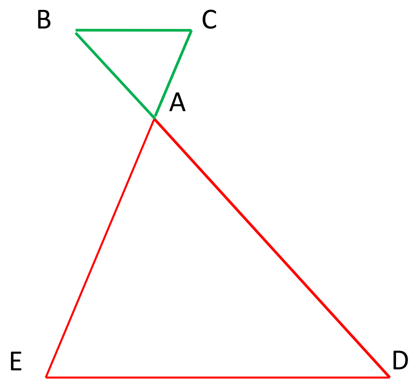
Si A, B, D et A, C, E sont alignés dans cet ordre et si

$\frac{AB}{AD}\neq\frac{AC}{AE}$

alors **(BC) et (DE) ne sont pas parallèles**

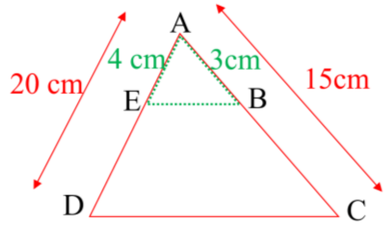


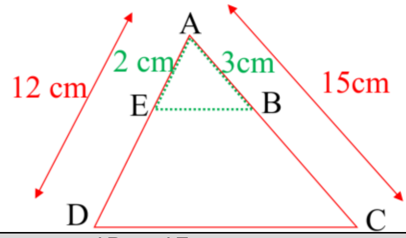




Exemples

On cherche à savoir si les droites (BE) et (CD) sont parallèles.





Si les droites (BE) et (CD) étaient parallèles, le théorème de Thalès donnerait $\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AD}$. On calcule séparément ces deux rapports

$\boldsymbol{\frac{AB}{AC}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}}$

$\frac{AE}{AD}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$

donc $\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AD}$ et comme A, B, C et A, E, D sont alignés dans le même ordre, d'après la propriété réciproque de Thalès alors (BE)//(CD).

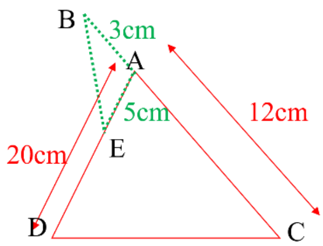
$\frac{AB}{AC}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

$\frac{AE}{AD}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

donc $\frac{AB}{AC}\neq\frac{AE}{AD}$ et comme A, B, C et A, E, D sont alignés dans le même ordre, d'après la contraposée de Thalès alors (BE) et (CD) ne sont pas parallèles.

Remarque

La condition d'alignement dans le même ordre est indispensable.



On a : $\frac{AB}{AC}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

On a aussi : $\frac{AE}{AD}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$

Donc $\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AD}$ et pourtant les droites (BE) et (CD) ne sont pas parallèles.

Soit B devrait appartenir à [AC], soit E devrait appartenir à [DA) sans appartenir à [DA].

PARCOURS DIFFÉRENCIÉS

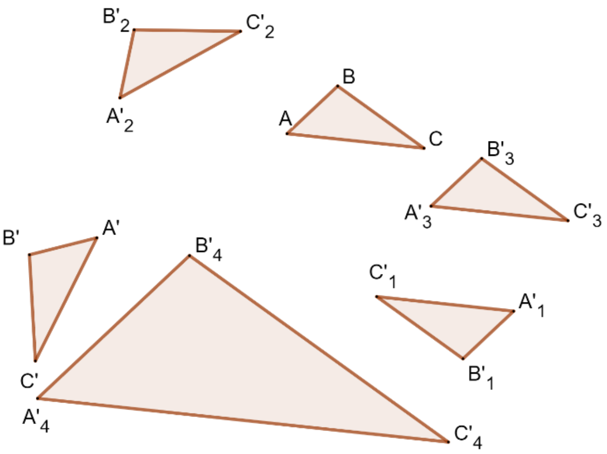
https://www.lesmathsdherve.net/thales-parcours-differencies/

MATHS

https://www.lesmathsdherve.net/thales-videos/

https://www.lesmathsdherve.net/thales-aide/

II – Triangles semblables



Définition

Deux triangles sont *semblables* s'ils ont la même forme, mais pas nécessairement la même taille.

Propriété admise

Deux triangles sont semblables :

- si leurs côtés sont proportionnels

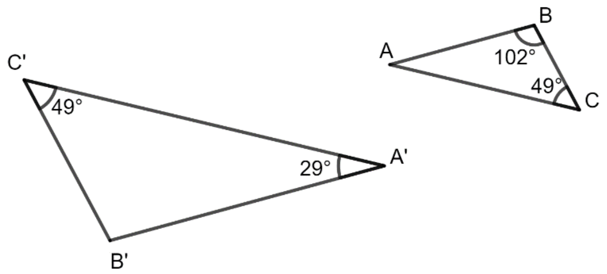
ou

- s'ils ont les mêmes angles.

Remarque

Pour passer entre deux triangles semblables, on peut effectuer une ou plusieurs transformations du plan vues au collège : symétrie axiale, symétrie centrale, translation, rotation ou homothétie.

Exemple 1 : avec des angles



Dans le triangle ABC, on a

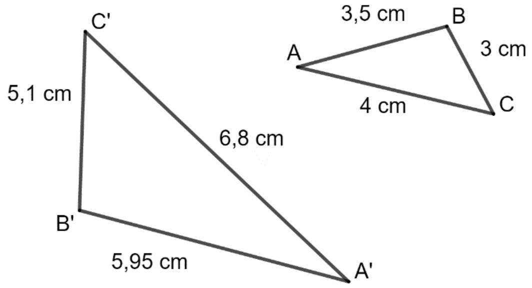
$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{180} - \left(\hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{C}}\right) = \mathbf{180} - (\mathbf{102} + \mathbf{49}) = \mathbf{29}°.$

Dans le triangle A'B'C', on a

$\hat{\mathbf{B}}' = \mathbf{180} - \left(\hat{\mathbf{A}}' + \hat{\mathbf{C}}'\right) = \mathbf{180} - (\mathbf{49} + \mathbf{29}) = \mathbf{102}°.$

On a donc $\widehat{\mathbf{ABC}} = \widehat{\mathbf{A'B'C'}}$ et $\widehat{\mathbf{ACB}} = \widehat{\mathbf{A'C'B'}}$ et $\widehat{\mathbf{BAC}} = \widehat{\mathbf{B'A'C'}}$ donc les triangles ABC et A'B'C' sont semblables.

Exemple 2 : avec des côtés proportionnels



$\dfrac{\mathbf{A'B'}}{\mathbf{AB}} = \dfrac{\mathbf{5,95}}{\mathbf{3,5}} = \mathbf{1,7}$

$\dfrac{\mathbf{A'C'}}{\mathbf{AC}} = \dfrac{\mathbf{6,8}}{\mathbf{4}} = \mathbf{1,7}$

$\dfrac{\mathbf{C'B'}}{\mathbf{CB}} = \dfrac{\mathbf{5,1}}{\mathbf{3}} = \mathbf{1,7}$

Donc $\dfrac{\mathbf{A'B'}}{\mathbf{AB}} = \dfrac{\mathbf{A'C'}}{\mathbf{AC}} = \dfrac{\mathbf{C'B'}}{\mathbf{CB}}$ donc les triangles ABC et A'B'C' sont semblables.

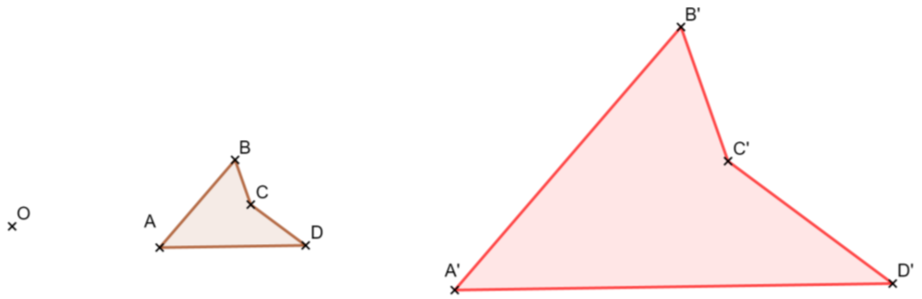
III – Homothéties : agrandissement/réduction

Définition

Le point A' est l'image du point A par l'*homothétie* de centre O et de coefficient k si :

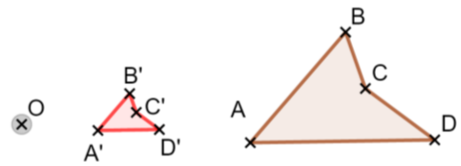
- A' ∈ (OA)
- OA' = k × OA

Si le coefficient est supérieur à 1, on parle d'*agrandissement*.



Le quadrilatère A'B'C'D' est agrandissement de ABCD de centre O et de coefficient 3.

Si le coefficient est entre 0 et 1, on parle de *réduction*.

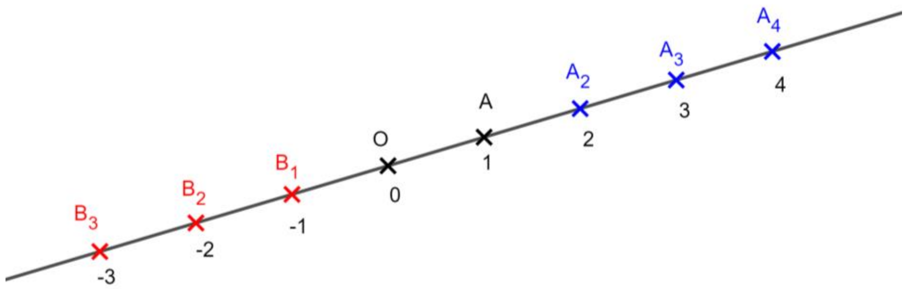


Le quadrilatère A'B'C'D' est la réduction de ABCD de centre O et de coefficient $\frac{1}{3}$.

Construction

Pour construire l’image du point A par l’homothétie de centre O et de rapport k, il faut :

- Si k>0, tracer [OA) puis mesurer [OA] et placer A’ sur [OA) tel que OA’ = k × OA
- Si k<0, tracer [AO) puis mesurer [OA] et placer A’ sur [AO) tel que OA’ = (*distance à zéro de* k) × OA



- A_2 est l’image de A par l’homothétie de centre O et de rapport 2
- A_3 est l’image de A par l’homothétie de centre O et de rapport 3
- A_4 est l’image de A par l’homothétie de centre O et de rapport 4
- B_1 est l’image de A par l’homothétie de centre O et de rapport -1
- B_2 est l’image de A par l’homothétie de centre O et de rapport -2
- B_3 est l’image de A par l’homothétie de centre O et de rapport -3

Remarque

Une homothétie de rapport -1 est une symétrie centrale

Propriété admise

L’homothétie conserve les angles, les formes mais pas les distances et les surfaces (cf. la propriété d’agrandissement réduction des solides, vue plus tard dans l’année).

Remarque

Pour construire l’image d’une figure complexe, on commence par construire l’image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

Pour construire la figure ci-contre, j’ai :

1. Tracer l’image A’ de A
2. Tracer l’image B’ de B
3. Construis le carré A’B’C’D’.
4. Tracer la diagonale [A’C’]
5. Placer son milieu E’.
6. Tracer le segment [B’E’].
7. Placer le point M’ au milieu de [A’B’].
8. Tracer le demi-cercle de diamètre [A’B’] à l’extérieur du carré.

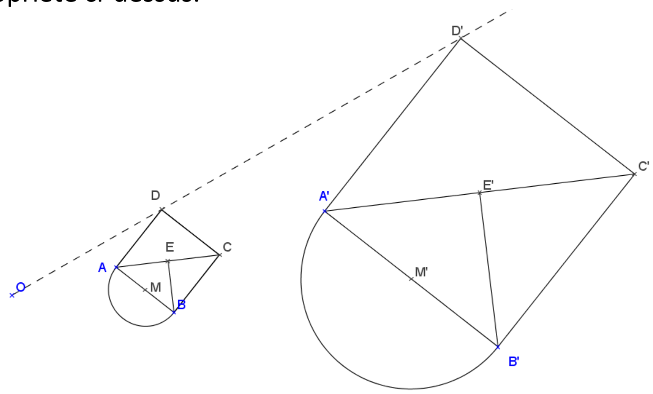


Image par l’homothétie de centre O et de rapport 3.

Caractériser

Pour caractériser une homothétie, il faut trouver son centre et son rapport.

Repérer 2 points A et B et leurs images A’ et B’ telles que ces points ne soient pas alignés.

Tracer les 2 demi-droites [A’A) et [B’B) ; elles se coupent en O qui est le centre.

Mesurer [OA] et [OA’].

Le rapport k vérifie : $k = \frac{OA\prime}{OA} = \frac{OB\prime}{OB}$.