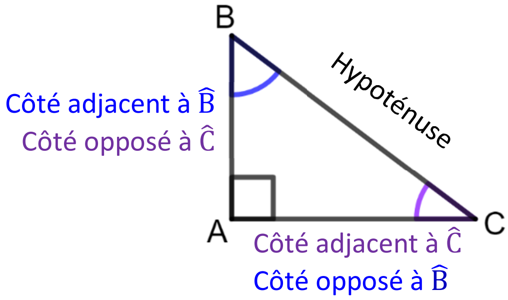
Triangles rectangles : TRIGONOMETRIE

Premier temps : le mathématicien indien Âryabhata (VIe siècle) utilise le mot jîva qui signifie corde.
Deuxième temps : le mathématicien arabe Al-Fazzârî (VIIIe siècle) arabise ce mot en jîba, mot n'ayant pas de signification en arabe.
Troisième temps : Gérard de Crémone (XIIe siècle) confond jîba avec jaîb, d'autant plus facilement qu'en arabe, les voyelles sont parfois omises ; or jaîb signifie « poche, cavité » et il le traduit naturellement en latin par sinus...
Quant au cosinus, c'est tout simplement le sinus du complémentaire (de l'angle) ; « co- » vient du latin cum, qui signifie « avec ».
La tangente, elle, vient de ce qu'elle mesure une portion d'une tangente au cercle trigonométrique.

Définitions



Préliminaire

Dans un triangle rectangle, les rapports suivants ne dépendent que de la mesure de l'angle et non de celles des côtés :

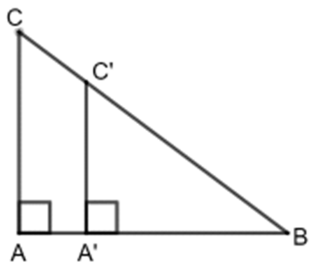
- Côté adjacent à l'angle aigu sur l'hypoténuse
- Côté opposé à l'angle aigu sur l'hypoténuse
- Côté opposé sur côté adjacent du même angle aigu.

On les appelle respectivement cosinus, sinus et tangente de l'angle aigu.

Démonstration

Comme (A'C') et (AC) sont perpendiculaires à (AB) alors (AC)//(A'C').
Comme (AC)//(A'C') et comme B, A', A et B, C', C sont alignés, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{\mathbf{BA'}}{\mathbf{BA}} = \frac{\mathbf{BC'}}{\mathbf{BC}} = \frac{\mathbf{A'C'}}{\mathbf{AC}}$$



BA' × BC = BC' × BA
÷BC' ÷BC ÷BC' ÷BC

donc $\frac{\mathbf{BA'}}{\mathbf{BC'}} = \frac{\mathbf{BA}}{\mathbf{BC}}$ = cosinus de l'angle $\widehat{B}$

BC' × AC = BC × A'C'
÷BC' ÷BC ÷BC ÷BC'

donc $\frac{\mathbf{AC}}{\mathbf{BC}} = \frac{\mathbf{A'C'}}{\mathbf{BC'}}$ = sinus de l'angle $\widehat{B}$

BA' × AC = BA × A'C'
÷BA' ÷BA ÷BA ÷BA'

donc $\frac{\mathbf{AC}}{\mathbf{BA}} = \frac{\mathbf{A'C'}}{\mathbf{BA'}}$ = tangente de l'angle $\widehat{B}$

Propriété

Dans un triangle rectangle :

- Le cosinus d'un angle aigu est le quotient du côté adjacent à cet angle par l'hypoténuse.
- Le sinus d'un angle aigu est le quotient du côté opposé à cet angle par l'hypoténuse.
- La tangente d'un angle aigu est le quotient du côté opposé à cet angle par son côté adjacent.

⚠ **Comment** se rappeler des formules ?

Méthode 1 : ♥ **SOH CAH TOA** Sin = Opposé / Hypoténuse Cos = Adjacent / Hypoténuse Tan = Opposé / Adjacent

Méthode 2 : ♥ **CAH SOH TOA** Cos = Adjacent / Hypoténuse Sin = Opposé / Hypoténuse Tan = Opposé / Adjacent

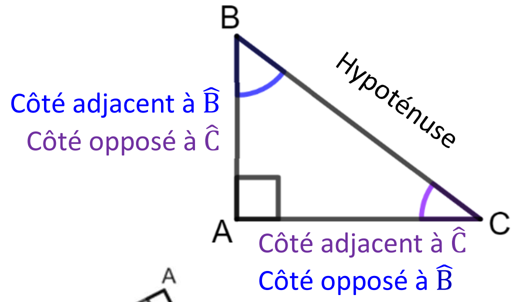
Méthode 3 :

♥ **COS ADJ HYP**	♥ **SIN OPP HYP**	♥ **TANG OPPADJ**
COSinus = ADJacent / HYPoténuse	SINus = OPPosé / HYPoténuse	TANGente = OPPosé / ADJacent

Formules

$\cos(\widehat{B}) = \dfrac{AB}{BC}$ $\sin(\widehat{B}) = \dfrac{AC}{BC}$ $\tan(\widehat{B}) = \dfrac{AC}{AB}$

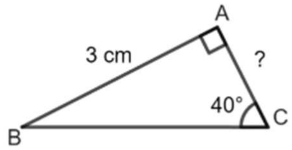
$\cos(\widehat{C}) = \dfrac{AC}{BC}$ $\sin(\widehat{C}) = \dfrac{AB}{BC}$ $\tan(\widehat{C}) = \dfrac{AB}{AC}$



Exemple de recherche d'un côté

Enoncé

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 3 cm et $\widehat{ACB}$ = 40°.
Calcule AC ; *donne une valeur approchée au centième près.*



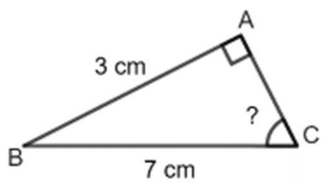
Réponse

Dans ABC rectangle en A	On cite le triangle rectangle
On connait : • $\widehat{C}$ • AB : opposé On cherche : • AC : adjacent	On identifie l'angle connu, le côté connu et le côté cherché.
La formule doit contenir opposé et adjacent ; on va utiliser la tangente	On cherche la formule qui comprend ces informations.
$\tan(\widehat{C}) = \dfrac{AB}{AC}$	On écrit la formule avec les « lettres » en veillant bien à placer les numérateurs et dénominateurs au « bon » endroit.
$\tan(40°) = \dfrac{3}{AC}$	On remplace les valeurs connues
$\dfrac{\tan(40°)}{1} = \dfrac{3}{AC}$	On transforme l'écriture pour obtenir deux fractions égales
$AC = \dfrac{3 \times 1}{\tan(40°)} \approx 3,58\text{ cm}$	On effectue les produits en croix On donne une valeur approchée On n'oublie pas l'unité

Exemple de recherche d'un angle

Enoncé

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 3 cm et $BC = 7\text{ cm}$.
Calcule $\widehat{C}$; *donne une valeur approchée au degré près.*



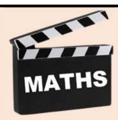
Réponse

Dans ABC rectangle en A $\sin(\widehat{C}) = \dfrac{AB}{BC}$ $sin(\widehat{C}) = \dfrac{3}{7}$ $\widehat{C} = \arcsin\left(\dfrac{3}{7}\right) \approx 25°$	On cherche : • $\widehat{C}$ On connait : • BC : hypoténuse • AB : opposé La formule doit contenir opposé et hypoténuse ; on va utiliser le sinus

Utilisation de la calculatrice

CASIO FX92	
Pour calculer $\frac{3\times1}{\tan(40°)}$, je tape	Pour calculer $\arcsin\left(\frac{3}{7}\right)$, je tape
[fraction] 3 [×] 1 [▼] [tan] 40 [)] [EXE]	[SHIFT] [sin] 3 [÷] 7 [)] [EXE]

https://www.lesmathsdherve.net/trigonometrie-parcours-differencies/



https://www.lesmathsdherve.net/trigonometrie-videos/

https://www.lesmathsdherve.net/trigonometrie-aide/