SYSTEMES de 2 équations à 2 inconnues (hors programme)

Définition

Lorsque plusieurs équations sont vraies simultanément, on parle de système d'équations que l'on note :

$$\begin{cases} Equation\ 1 \\ Equation\ 2 \\ Equation\ 3 \\ \quad\ldots \end{cases}$$

Remarque

Les systèmes étudiés cette année auront deux équations et les équations auront deux inconnues et seront de degré 1.

Définition

Pour donner les solutions d'un système de deux équations à deux inconnues, on donnera des couples de nombres.
Résoudre le système c'est trouver toutes les solutions du système.

Exemple

Pour le système $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$ il y a une unique solution (2 ; 5).

On peut aussi noter S = {(2 ; 5)}

Pour le système (hors programme) $\begin{cases} x^2 = 9 \\ y = 5 \end{cases}$ il y a deux solutions (3 ; 5) et (-3 ; 5).

On peut aussi noter S = {(3 ; 5) ; (-3 ; 5)}

Pour le système (hors programme) $\begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 25 \end{cases}$ il y a quatre solutions (3 ; 5) et (-3 ; 5) et (3 ; -5) et (-3 ; -5).

On peut aussi noter S = {(3 ; 5) ; (-3 ; 5) ; (3 ; -5) ; (-3 ; -5)}

Remarque

Les valeurs sont rangées dans l'ordre alphabétique des inconnues.

Comment résoudre un système par substitution ?

1. On isole une inconnue dans une équation.
2. On substitue (remplace) cette inconnue dans l'autre équation.
3. On obtient alors une équation à une seule inconnue que l'on résout.
4. On substitue la solution trouvée dans l'autre équation et on obtient à nouveau une équation à une seule inconnue que l'on résout.
5. On vérifie et on conclue.

Exemple 1

$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 3x + 5y = 29 \end{cases}$ donc $\begin{cases} y = 10 - 2x \\ 3x + 5y = 29 \end{cases}$ donc $\begin{cases} y = 10 - 2x \\ 3x + 5 \times (10 - 2x) = 29 \end{cases}$ donc $\begin{cases} y = 10 - 2x \\ 3x + 50 - 10x = 29 \end{cases}$

donc $\begin{cases} y = 10 - 2x \\ -7x + 50 = 29 \end{cases}$ donc $\begin{cases} y = 10 - 2x \\ -7x = -21 \end{cases}$ donc $\begin{cases} y = 10 - 2x \\ x = 3 \end{cases}$ donc $\begin{cases} y = 10 - 2 \times 3 \\ x = 3 \end{cases}$ donc $\begin{cases} y = 4 \\ 7x = 3 \end{cases}$

Vérification

Si x = 3 et y = 4 alors 2 x + y = 2×3 + 4 = 10

et 3 x + 5y = 3×3 + 5×4 = 29 C'est bon

La solution de l'équation est **(3 ; 4)**.

Exemple 1 autre rédaction

$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 3x + 5y = 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 - 2x \\ 3x + 5y = 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 - 2x \\ 3x + 5 \times (10 - 2x) = 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 - 2x \\ 3x + 50 - 10x = 29 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 - 2x \\ -7x + 50 = 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 - 2x \\ -7x = -21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 - 2x \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 - 2 \times 3 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ 7x = 3 \end{cases}$

La vérification est alors inutile et on peut conclure en écrivant :

S = {(3 ; 4)}

Exemple 2

$$\begin{cases}2x+3y=31\\5x+7y=74\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x=31-3y\\5x+7y=74\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{31-3y}{2}\\5x+7y=74\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{31-3y}{2}\\5\times\frac{31-3y}{2}+7y=74\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{31-3y}{2}\\\frac{155}{2}-\frac{15y}{2}+7y=74\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{31-3y}{2}\\\frac{155}{2}-\frac{1}{2}y=74\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{31-3y}{2}\\-\frac{1}{2}y=-\frac{7}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{31-3y}{2}\\y=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{31-3\times7}{2}\\y=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\y=7\end{cases}$$

S = {(5 ; 7)}

Remarque

La méthode « marche » très bien mais devient complexe à cause de l'utilisation des fractions. Il est préférable d'utiliser une autre méthode.

Définition

Multiplier une équation par un nombre, c'est multiplier les deux membres par ce même nombre.

Propriété admise

On ne change pas les solutions d'un système si :

1. On multiplie une ligne par un nombre non nul.
2. On remplace une ligne par la somme (ou la différence) de deux lignes.

Comment résoudre un système par combinaison linéaire ?

1. On choisit une inconnue et on s'arrange pour en avoir le même nombre (au signe près) dans les deux équations.
2. On remplace une ligne par la somme (ou la différence) des deux lignes afin de faire « disparaître » une inconnue.
3. On résout l'équation obtenue.
4. On substitue la valeur trouvée dans l'autre équation.
5. On vérifie et on conclue.

Exemple 3

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}2x+3y=31\\5x+8y=81\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix}5\times L_1\\2\times L_2\end{matrix}\begin{cases}10x+15y=155\\10x+16y=162\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix}L_1-L_2\\L_2\end{matrix}\begin{cases}-1y=-7\\10x=162-16y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=7\\x=\dfrac{162-16\times7}{10}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=7\\x=5\end{cases}$$

S = {(5 ; 7)}

Exemple 4

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}2x+5y=45\\3x-8y=-41\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix}8\times L_1\\5\times L_2\end{matrix}\begin{cases}16x+40y=360\\15x-40y=-205\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix}L_1+L_2\\L_2\end{matrix}\begin{cases}31x=155\\-40y=-205-15x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\y=\dfrac{-205-15\times5}{-40}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\y=7\end{cases}$$

S = {(5 ; 7)}

Exemple de problème

Jules achète 3 pains au chocolat et 5 croissants. Il paye 8,05€.
Dans la même boulangerie, Adrien achète 2 pains au chocolat et 7 croissants. Il paye 8,85€.
Combien coûte un pain au chocolat ? un croissant ?

Soit x le prix d'un pain au chocolat et y le prix d'un croissant.

$$\begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}3x+5y=8{,}05\\2x+7y=8{,}85\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix}2\times L_1\\3\times L_2\end{matrix}\begin{cases}6x+10y=16{,}10\\6x+21y=26{,}55\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix}L_2-L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}11y=10{,}45\\6x=26{,}55-21y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=0{,}95\\x=\dfrac{26{,}55-21\times0{,}95}{6}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=0{,}95\\x=1{,}1\end{cases}$$

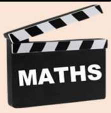
Donc un pain au chocolat coûte 1,10€ et un croissant coûte 0,95€.

Utilisation de la calculatrice

Pour résoudre le système $\begin{cases} 3x + 5y = 8{,}05 \\ 2x + 7y = 8{,}85 \end{cases}$, je tape

CASIO FX 92	CASIO FX 92 < *2015*	TI-collège Plus
MODE 4 $\begin{smallmatrix} x & y \\ = & 0 \end{smallmatrix}$ 1 : Syst équations Nombre inconnues 2 3 exe 5 exe 8,05 exe 2 exe 7 exe 8,85 exe exe → X = 1,1 exe → Y = 0,95 MODE 1 :calculer	MODE 3 :system 1 :anX+bnY=cn 3 exe 5 exe 8,05 exe 2 exe 7 exe 8,85 exe exe → X = 1,1 exe → Y = 0,95 MODE 1 :comp	2nde maths 3 entrer + 5 entrer 8.05 entrer 2 entrer + 7 entrer 8.85 entrer entrer → X = 11/10 → Y = 19/20 entrer annul

https://www.lesmathsdherve.net/systemes-dequations-parcours/



https://www.lesmathsdherve.net/systemes-dequations-videos/

https://www.lesmathsdherve.net/systemes-dequations-aide/

Approfondissement relatifs et fractions

Ces notions ont été installées dans les classes antérieures ; il faudra se contenter d'exercices d'applications et de rappels.
❺ Il additionne et soustrait des nombres décimaux relatifs.
❺ Il résout des problèmes faisant intervenir des nombres décimaux relatifs et des fractions.
❺ Il utilise la notion d'opposé

❻ Il ajoute des fractions de même dénominateur.
❻ Il sait utiliser des fractions pour exprimer un quotient. Il comprend que $b \times \frac{a}{b} = a$
❺ Il reconnaît et produit des fractions égales.
5h
❺ Il traduit un enchaînement d'opérations à l'aide d'une expression avec des parenthèses.
❺ Il effectue mentalement, à la main ou l'aide d'une calculatrice un enchaînement d'opérations en respectant les priorités opératoires.
❺ Il additionne ou soustrait des fractions dont les dénominateurs sont égaux ou multiples l'un de l'autre.
❹ Il effectue avec des nombres décimaux relatifs, des produits et des quotients.
❹ Il calcule avec les nombres rationnels : addition, soustraction, multiplication, division.
❹ Il résout des problèmes avec des nombres rationnels.
❸ Il calcule avec les nombres rationnels, notamment dans le cadre de **résolution de problèmes**.

Puissances

Puissances de base quelconque *(pas faites en 4ème)*.
❹ Il utilise les puissances de 10 d'exposants positifs ou négatifs.
❹ Il associe, dans le cas des nombres décimaux, écriture décimale, écriture fractionnaire et notation scientifique.
❹ Il utilise les préfixes de nano à giga.
5h ❹ Il utilise les ordres de grandeur pour vérifier ses résultats.
❹ Il utilise les puissances d'exposants strictement positifs d'un nombre pour simplifier l'écriture des produits.
❹ Il utilise des puissances de 10 pour comparer des nombres.
❸ Il résout des problèmes avec des puissances, notamment en utilisant la notation scientifique.
❸ Utiliser des puissances négatives pour simplifier des quotients

Rotations

❻ Il complète une figure par symétrie axiale.
❻ Il construit le symétrique d'un point, d'un segment, d'une droite par rapport à un axe donné et il est capable de verbaliser/expliciter sa méthode de construction.
❻ Il construit la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à un axe donné sur papier ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
❻ Il connaît les propriétés de conservation de la symétrie axiale et il les utilise pour raisonner.

❺ Il transforme une figure par symétrie centrale.
❺ Il identifie des symétries dans des frises, des pavages, des rosaces.
❺ Il mobilise les connaissances des figures, des configurations et des symétries pour déterminer des grandeurs géométriques.
❺ Il mène des raisonnements en utilisant des propriétés des figures, des configurations et des symétries.
❺ Il comprend l'effet des symétries (axiale et centrale) : conservation du parallélisme, des longueurs et des angles.
7h
❹ Il construit un agrandissement ou une réduction d'une figure donnée.

❹ Il comprend l'effet d'une translation : conservation du parallélisme, des longueurs, des aires et des angles.
❹ Il transforme une figure par translation.
❹ Il identifie des translations dans des frises et des pavages.
❹ Il mobilise les connaissances des figures, des configurations et de la translation pour déterminer des grandeurs géométriques.
❹ Il mène des raisonnements en utilisant des propriétés des figures, des configurations et de la translation.

❸ Il identifie des rotations et des homothéties dans des frises, des pavages et des rosaces.
❸ Il transforme une figure par rotation et il comprend l'effet d'une rotation.
❸ Il mobilise les connaissances des figures, des configurations, de la rotation pour déterminer des grandeurs géométriques.
❸ Il mène des raisonnements en utilisant des propriétés des figures, des configurations, de la rotation.

Equations du premier degré à une inconnue – Développer – Identités remarquables.

❺ Il utilise la distributivité simple pour réduire une expression littérale de la forme *ax*+*bx* où a et b sont des nombres décimaux.
❺ Il produit une expression littérale pour élaborer une formule ou traduire un programme de calcul.
❺ Il utilise une lettre pour traduire des propriétés générales et pour démontrer une propriété générale.
12h
❺ Il substitue une valeur numérique à une lettre pour : calculer la valeur d'une expression littérale, tester, à la main ou de façon instrumentée, si une égalité où figurent une ou deux indéterminées est vraie quand on leur attribue des valeurs numériques, contrôler son résultat.