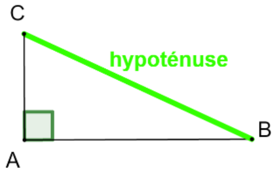
Triangles rectangles : PYTHAGORE

I – PYTHAGORE



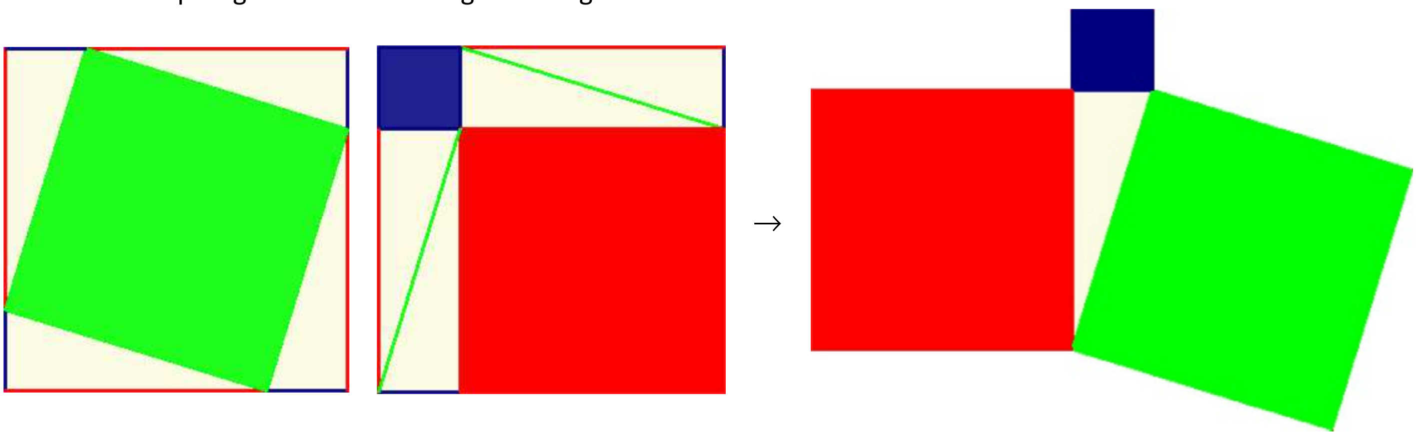
Définition

Dans un triangle, le côté opposé à l'angle droit est appelé l'*hypoténuse*.

Hypoténuse vient du latin *hypotenusa* qui vient lui-même du grec *hupoteinousa* qui signifie « cele qui sous-tend ». Ce terme désigne le côté du triangle rectangle qui semble être « tendu » par le secteur angulaire de l'angle droit.
Les côtés adjacents à l'angle droits étaient appelés cathètes.

Remarque

C'est le plus grand côté du triangle rectangle.



Théorème de Pythagore admis

- Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.
- Si ABC un triangle rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

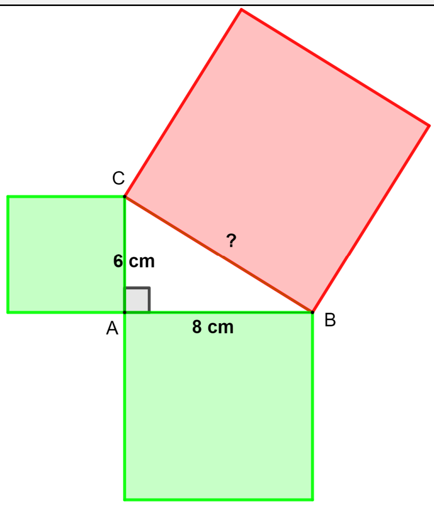
⚠ ***Cette propriété ne s'applique que dans les triangles rectangles.***

Exemples

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que

- AB = 8 cm
- AC = 6 cm

Calcule BC.

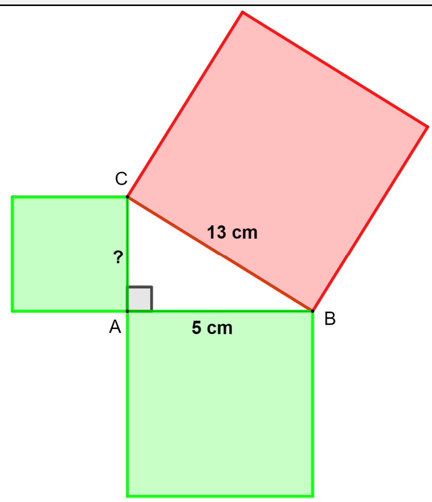


Dans ABC rectangle en A,
d'après le théorème de Pythagore
$BC^2 = AC^2 + AB^2$
$BC^2 = 6^2 + 8^2$
$BC^2 = 36 + 64$
$BC^2 = 100$
BC = $\sqrt{100}$ = **10 cm**

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que

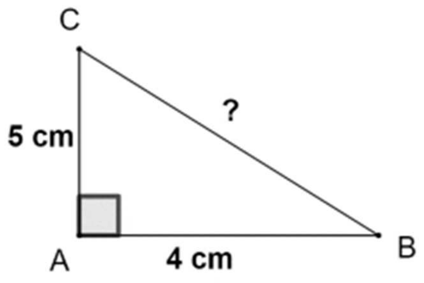
- AB = 5 cm
- BC = 13 cm

Calcule AC.



Dans ABC rectangle en A,
d'après le théorème de Pythagore
$BC^2 = AB^2 + AC^2$
$13^2 = 5^2 + AC^2$
$169 = 25 + AC^2$
$-25 \quad -25$
$144 = AC^2$
AC = $\sqrt{144}$ = **12 cm**

Exemple avec valeur approchée
Soit ABC un triangle rectangle tel que AB = 4 cm et AC = 5 cm.
Calcule BC.



Dans ABC rectangle en A,
d'après le théorème de Pythagore
$BC^2 = AB^2 + AC^2$
$BC^2 = 4^2 + 5^2$
$BC^2 = 16 + 25$
$BC^2 = 41$
$BC = \sqrt{41} \approx 6{,}4$ cm

Utilisation de la calculatrice

CASIO FX92	TI collège
Pour calculer $6^2 + 8^2$, je tape	
6 $\boxed{x^2}$ + 8 $\boxed{x^2}$ $\boxed{\text{EXE}}$	6 $\boxed{x^2}$ + 8 $\boxed{x^2}$ =

CASIO FX92	TI collège
Pour calculer $\sqrt{100}$, je tape	
$\boxed{\text{SECONDE}}$ $\boxed{x^2}$ 100 $\boxed{\text{EXE}}$	$\boxed{\text{SECONDE}}$ $\boxed{x^2}$ 100 =

Propriété réciproque de Pythagore admise

- Dans un triangle, si le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle est rectangle.
- Soit ABC un triangle.
  Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors le triangle est rectangle et [BC] est l'hypoténuse, le triangle est rectangle en A.

Propriété contraposée de Pythagore admise

- Dans un triangle, si le carré du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle n'est pas rectangle.
- Soit ABC un triangle.
  Si [BC] est le plus grand côté et $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ alors le triangle n'est pas rectangle.

Exemples

Prouver qu'un triangle est rectangle.	Prouver qu'un triangle n'est pas rectangle.
Soit ABC un triangle tel que AB = 3 cm, BC = 4 cm et AC = 5 cm. *Quelle est la nature de ABC ?*	*Soit ABC un triangle tel que AB = 5 cm, BC = 7 cm et AC = 6 cm.* *Quelle est la nature de ABC ?*
Si ABC était rectangle, l'hypoténuse serait [AC] car c'est le plus grand côté. $AC^2 = 5^2 = 25$ | $AB^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ Donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc d'après la propriété réciproque de Pythagore, **ABC est rectangle en B** *(car [AC] est l'hypoténuse)*.	Si ABC était rectangle, l'hypoténuse serait [BC] car c'est le plus grand côté. $BC^2 = 7^2 = 49$ | $AB^2 + AC^2 = 5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61$ Donc $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ d'après la contraposée de Pythagore alors **ABC n'est pas rectangle**.

II – RACINES CARREES et RACINES CUBIQUES hors programme en France mais nécessaire pour le collège en Suisse

Remarque ♥

$2^2 = 4$ $3^2 = 9$ $4^2 = 16$ $5^2 = 25$ $6^2 = 36$ $7^2 = 49$
$8^2 = 64$ $9^2 = 81$ $10^2 = 100$ $11^2 = 121$ $12^2 = 144$ $13^2 = 169$

$1^3 = 1$ $2^3 = 8$ $3^3 = 27$ $4^3 = 64$ $5^3 = 125$
$6^3 = 216$ $7^3 = 343$ $8^3 = 512$ $9^3 = 729$ $10^3 = 1000$

Définitions

La *racine carrée* de a est le nombre **positif** noté $\sqrt{a}$ tel que $\sqrt{a}^2 = a$

La *racine cubique* de a est le nombre noté $\sqrt[3]{a}$ tel que $\sqrt[3]{a}^3 = a$

Remarques sur la racine carrée

$$5 \quad \begin{array}{c} \rightarrow \blacksquare^2 \rightarrow \\ \leftarrow \sqrt{\blacksquare} \leftarrow \end{array} \quad 25$$

$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{49} = 7$
$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{100} = 10$	$\sqrt{121} = 11$	$\sqrt{144} = 12$	$\sqrt{169} = 13$

La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas.

$\sqrt{-1}$ n'existe pas
$\sqrt{-4}$ n'existe pas

Au lycée, une solution sera proposée pour ces racines carrées : les nombres complexes.

Remarques sur la racine cubique

$$5 \quad \begin{array}{c} \rightarrow \blacksquare^3 \rightarrow \\ \leftarrow \sqrt[3]{\blacksquare} \leftarrow \end{array} \quad 125$$

$\sqrt[3]{1} = 1$	$\sqrt[3]{8} = 2$	$\sqrt[3]{27} = 3$	$\sqrt[3]{64} = 4$	$\sqrt[3]{125} = 5$
$\sqrt[3]{216} = 6$	$\sqrt[3]{343} = 7$	$\sqrt[3]{512} = 8$	$\sqrt[3]{729} = 9$	$\sqrt[3]{1000} = 10$
$\sqrt[3]{-1} = -1$	$\sqrt[3]{-8} = -2$	$\sqrt[3]{-27} = -3$	$\sqrt[3]{-64} = -4$	$\sqrt[3]{-125} = -5$
$\sqrt[3]{-216} = -6$	$\sqrt[3-]{343} = -7$	$\sqrt[3]{-512} = -8$	$\sqrt[3]{-729} = -9$	$\sqrt[3]{-1000} = -10$

Propriétés admises

Soient a et b deux nombres positif avec b non nul.

$$\sqrt{a}^2 = a$$
$$\sqrt{a^2} = a$$
$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$
$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Pour tous les nombres a et b avec b non nul.

$$\sqrt[3]{a}^3 = a$$
$$\sqrt{a^3} = a$$
$$\sqrt[3]{a \times b} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$$
$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

Exemples de calculs

$$\sqrt{5}^2 = 5$$
$$\sqrt{3^2} = 3$$
$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$
$$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\sqrt{1,2}^2 = 1,2$$
$$\sqrt{5,2^2} = 5,2$$
$$\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$$
$$\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{50}} = \sqrt{\frac{200}{50}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt[3]{7}^3 = 7$$
$$\sqrt{11^3} = 11$$
$$\sqrt[3]{50} \times \sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{50 \times 20} = \sqrt[3]{1000} = 10$$
$$\sqrt[3]{\frac{125}{27}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{5}{3}$$

$$\sqrt[3]{-8}^3 = -8$$
$$\sqrt{(-4)^3} = -4$$
$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \times 2} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$$
$$\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3$$

Définition

Simplifier une racine s'est transformer une racine en produit d'un entier par une racine d'un nombre dont la distance à zéro est plus petite.

Astuce
Pour simplifier la racine d'un entier, il faut écrire l'entier sous la forme du produit d'un carré (ou cube) par un entier

Exemples de simplification de racines carrées

$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ $\qquad$ $\sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = \sqrt{4} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$

$\sqrt{147} = \sqrt{49 \times 3} = \sqrt{49} \times \sqrt{3} = 7\sqrt{3}$ $\qquad$ $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

$\sqrt{72} = \sqrt{4 \times 18} = \sqrt{4} \times \sqrt{18} = 2\sqrt{18} = 2\sqrt{9 \times 2} = 2 \times \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 2 \times 3 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

$\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}7\sqrt{50} - 4\sqrt{18} &= 7 \times \sqrt{25 \times 2} - 4 \times \sqrt{9 \times 2} = 7 \times \sqrt{25} \times \sqrt{2} - 4 \times \sqrt{9} \times \sqrt{2} \\ &= 7 \times 5 \times \sqrt{2} - 4 \times 3 \times \sqrt{2} = 35\sqrt{2} - 12\sqrt{2} = 23\sqrt{2}\end{aligned}$$

Exemples de simplification de racines cubiques

$\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8 \times 4} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{125 \times 2} = \sqrt[3]{125} \times \sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2}$

$$\begin{aligned}11\sqrt[3]{24} + 7\sqrt[3]{-375} &= 11\sqrt[3]{8 \times 3} + 7\sqrt[3]{-125 \times 3} = 11 \times \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{3} + 7 \times \sqrt[3]{-125} \times \sqrt[3]{3} \\ &= 11 \times 2 \times \sqrt[3]{3} + 7 \times (-5) \times \sqrt[3]{3} = 22\sqrt[3]{3} - 35\sqrt[3]{3} = -13\sqrt[3]{3}\end{aligned}$$

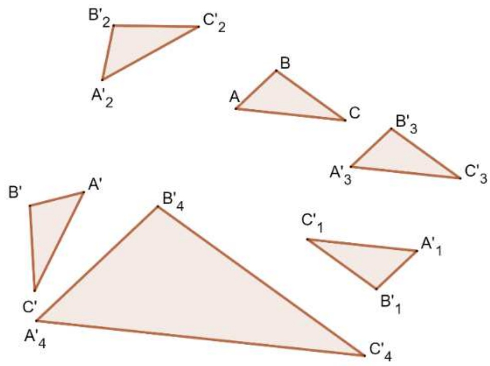
Remarques
Les racines doivent être simplifiées.
Les calculatrices simplifient automatiquement les racines carrées.

Exemple avec décomposition en produit de facteurs premiers
$31104 = 2^7 \times 3^5$

$$\begin{aligned}\sqrt{31104} = \sqrt{2^7 \times 3^5} &= \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3} \\ &= \sqrt{2^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3} \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times \sqrt{2} \times 3 \times 3 \times \sqrt{3} \\ &= 72\sqrt{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{31104} &= \sqrt[3]{2^7 \times 3^5} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^3 \times 2 \times 3^3 \times 3^2} = \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{3^2} = 2 \times 2 \times \sqrt[3]{2} \times 3 \times \sqrt[3]{3^2} \\ &= 12\sqrt[3]{18}\end{aligned}$$

III – TRIANGLES SEMBLABLES



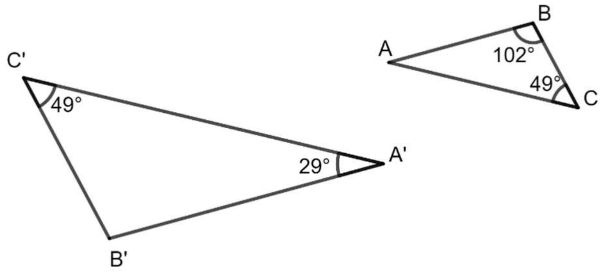
Définition
Deux triangles sont *semblables* s'ils ont la même forme, mais pas nécessairement la même taille.

Propriété admise
Deux triangles sont semblables :
- si leurs côtés sont proportionnels

ou
- s'ils ont les mêmes angles.

Remarque
Pour passer entre deux triangles semblables, on peut effectuer une ou plusieurs transformations du plan vues au collège : symétrie axiale, symétrie centrale, translation, rotation ou homothétie.

Exemple 1 : avec des angles

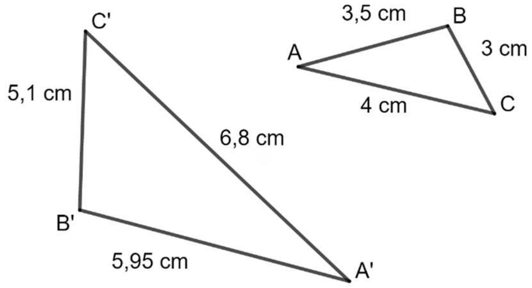


Dans le triangle ABC, on a
$\widehat{A} = 180 - \left(\widehat{B} + \widehat{C}\right) = 180 - (102 + 49) = 29°$.

Dans le triangle A'B'C', on a
$\widehat{B'} = 180 - \left(\widehat{A'} + \widehat{C'}\right) = 180 - (49 + 29) = 102°$.

On a donc $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$ et $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ donc les triangles ABC et A'B'C' sont semblables.

Exemple 2 : avec des côtés proportionnels



$$\frac{\mathbf{A'B'}}{\mathbf{AB}} = \frac{\mathbf{5,95}}{\mathbf{3,5}} = \mathbf{1,7}$$

$$\frac{\mathbf{A'C'}}{\mathbf{AC}} = \frac{\mathbf{6,8}}{\mathbf{4}} = \mathbf{1,7}$$

$$\frac{\mathbf{C'B'}}{\mathbf{CB}} = \frac{\mathbf{5,1}}{\mathbf{3}} = \mathbf{1,7}$$

Donc $\frac{\mathbf{A'B'}}{\mathbf{AB}} = \frac{\mathbf{A'C'}}{\mathbf{AC}} = \frac{\mathbf{C'B'}}{\mathbf{CB}}$ donc les triangles ABC et A'B'C' sont semblables.

PARCOURS DIFFÉRENCIÉS	MATHS		MATHS
https://www.lesmathsdherve.net/triangles-rectangles-parcours-differencies/	https://www.lesmathsdherve.net/triangles-rectangles-videos/	https://www.lesmathsdherve.net/triangles-rectangles-aides/	https://www.lesmathsdherve.net/triangles-rectangles-diaporama/