PUISSANCES

La première mention, de carrés ou de cubes, remonte à l'époque babylonienne, au 23ème siècle avant J C. $\sqrt{2} \approx 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$
Le terme exposant est dû au mathématicien allemand Stifel (1487 – 1567) qui généralisent la notation aux exposants négatifs. L'auteur de l'*Arithmética intégra* était un moine, disciple du Luther, qui calcula la fin du mond pour le 18 octobre 1533.
La notation scientifique est inventée par René Descartes (vers 1637) dans *La géométrie*. Il y invente aussi le symbole $\sqrt{}$.

Définition

Le nombre noté a^n qui se lit « a exposant n » est le produit de n facteurs tous égaux à a.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\text{n facteurs}}$$

Exemples

$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ $\quad$ $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ $\quad$ $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

Remarques

a^2 se lit "a exposant 2" ou "a au carré"
a^3 se lit "a exposant 3" ou "a au cube"

Astuce

La règle des signes s'applique pour le calcul des puissances.

Le signe de a^n est positif si :
- *a* est positif
- ou *a* est négatif et n est pair (0, 2, 4, 6, 8, 10 …).

Le signe de a^n est négatif si : *a* est négatif et n est impair (1, 3, 5, 7, 9, 11 …).

Exemples

4^5 est positif
$(-4)^5$ est négatif car il y a **5** facteurs négatifs.
$(-10)^8$ est positif car il y a **8** facteurs négatifs.

Propriété de priorité opératoire - admise

Pour calculer une expression numérique, on procède selon l'ordre suivant :
1. On calcule l'intérieur des parenthèses. Si des parenthèses sont imbriquées (l'une dans l'autre), on commence par celles qui sont le plus à l'intérieur.
2. On calcule les puissances.
3. On effectue les multiplications et divisions.
4. On termine toujours par les additions et soustractions.

Exemple

$4 \times 5^2 \times (5 - 4 \times 3)$
$= 4 \times 5^2 \times (5 - 12)$
$= 4 \times 5^2 \times (-7)$
$= 4 \times 25 \times (-7)$
$= 100 \times (-7)$
$= -700$

Attention à la position du signe "-" dans le calcul des puissances
$(-2)^4 = 16$ car $(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = +16$
$-2^4 = -16$ car $-2^4 = -2 \times 2 \times 2 \times 2 = -16$
$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

La puissance est prioritaire sur le signe "-" qui correspond à une soustraction.
On calcule d'abord la puissance.

Propriété 1 - admise

$$x^a \times x^b = x^{a+b}$$ S'il y a le même nombre en bas, on additionne les puissances

Exemples

$2^3 \times 2^7 = 2^{3+7} = 2^{10}$ $\quad$ $3^4 \times 3^7 = 3^{4+7} = 3^{11}$ $\quad$ $(-2)^3 \times (-2)^7 = (-2)^{3+7} = (-2)^{10}$

"Justification"

$2^3 \times 2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{3+7} = 2^{10}$

⚠ Attention à la consigne car on peut attendre deux résultats différents.

Calcule	Mettre $2^3 \times 2^5$ sous la forme d'une seule puissance
$2^3 \times 2^5 = 8 \times 32$ $= 256$ *Le résultat est un nombre (entier ou décimal) ou une fraction*	$2^3 \times 2^5$ $= 2^8$ *Le résultat est **une** puissance*

Propriété 2 - admise

$$x^a \times y^a = (x \times y)^a$$

S'il y a le même nombre en haut, on multiplie les nombres du « bas »

Exemples

$$2^3 \times 5^3 = (2 \times 5)^3 = 10^3 \qquad 3^5 \times 7^5 = (3 \times 7)^5 = 21^5$$

"Justification"

$$\begin{array}{cccccccc} 2^3 & & 2 & & 2 & & 2 \\ \times 5^3 & = & \times 5 & \times & \times 5 & \times & \times 5 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & = & 10 & \times & 10 & \times & 10 \\ & = & 10^3 & & & & \end{array}$$

Propriété 3 - admise

$$(x^a)^b = x^{a \times b}$$

Si les puissances sont imbriquées, on multiplie les exposants.

Exemples

$$(2^3)^4 = 2^{3\times4} = 2^{12} \qquad ((-3)^2)^4 = (-3)^{2\times4} = (-3)^8$$

"Justification"

$$(2^3)^4 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{12}$$

Remarque

← ÷ 2 — — × 2 →	← ÷ 2 — — × 2 →	← ÷ 2 — — × 2 →	← ÷ 2 — — × 2 →	← ÷ 2 — — × 2 →	← ÷ 2 — — × 2 →	← ÷ 2 — — × 2 →	← ÷ 2 — — × 2 →	← ÷ 2 — — × 2 →
2^{-4}	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4
0,0625	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	16
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$					
$\frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^1}$					

$$2^{-4} = \frac{1}{2^4} \qquad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} \qquad 2^{-2} = \frac{1}{2^2} \qquad 2^{-1} = \frac{1}{2^1}$$

Propriété 4 - admise

Si $x \neq 0$ alors $x^0 = 1$

Exemples

$4^0 = 1$ $\quad (-4)^0 = 1$ $\quad \pi^0 = 1$ $\quad 2{,}7^0 = 1$ $\quad (-4{,}8)^0 = 1$ $\quad -9^0 = -1$

Propriété 5

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

L'exposant négatif devient « 1 sur … » ou l'inverse.

Exemples

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \qquad 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} \qquad (-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = \frac{1}{-32} = -\frac{1}{32}$$

Démonstration

$n + (-n) = 0$

$x^{n+(-n)} = x^0$

$x^n \times x^{(-n)} = 1$

x^n et x^{-n} sont inverses l'un de l'autre

$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

Propriété 6 - admise

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

Lorsqu'on divise des puissances du même nombre, on soustrait les exposants.

Exemples

$$\frac{5^{12}}{5^8} = 5^{12-8} = 5^4 \qquad \frac{5^{15}}{5^{18}} = 5^{15-18} = 5^{-3} = \frac{1}{5^3} \qquad \frac{5^7}{5^{-8}} = 5^{7-(-8)} = 5^{15}$$

Propriété 7 - admise

$$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$$

L'exposant se distribue sur le numérateur et sur le dénominateur

Exemples

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81} \qquad \left(-\frac{5}{4}\right)^3 = -\frac{5^3}{4^3} = -\frac{125}{64} \qquad \left(-\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{2^4}{5^4} = \frac{16}{625}$$

Propriété - admise

Soit n un entier positif.
10^n s'écrit avec un "1" suivi de n "0".
10^{-n} s'écrit "0,0...01" avec n "0" au total en comptant celui avant la virgule.

Exemples

10^7 = 1**0000000** 10^{-8} = **0,0000000**1

7 zéros   8 zéros

Définition

Un nombre est dit **sous la forme scientifique** (ou en **notation scientifique**) s'il s'écrit sous la forme : $a \times 10^n$

↙ ↘

a est un nombre décimal dont la distance à zéro est supérieure ou égale à 1 et strictement inférieure à 10 (il ne peut pas être égal à 10).

n est un entier relatif (positif ou négatif)

Exemples de nombres n'étant pas en notation scientifique

15	10^3	15×10^4	10×10^4	$0,8 \times 10^4$	$1,5 \times 10^{4,2}$
Il manque $\times 10^{\dots}$	Il manque un nombre devant	Le nombre devant est supérieur à 10.	Le nombre devant est égal à 10.	Le nombre devant n'est pas supérieur ou égal à 1.	L'exposant n'est pas entier

Exemples de nombres n'étant pas en notation scientifique

1×10^4	$1,5 \times 10^{-5}$	$-1,5 \times 10^{42}$	$-9,5 \times 10^{-12}$	$-1,7 \times 10^0$	$1,5 \times 10^0$

Rappels

Si n est positif, multiplier par 10^n c'est décaler la virgule de n rangs vers la droite.
Si n est positif, multiplier par 10^{-n} c'est décaler la virgule de n rangs vers la gauche.

Exemples de passage de la notation scientifique à la notation décimale.

$4,52 \times 10^4 = 45200$ $-6 \times 10^4 = -60000$ $4,52 \times 10^{-4} = 0,000452$

Exemples de passage de la notation décimale à la notation scientifique.

$123,45 = 1,2345 \times 10^2$ *$10^2 = 100$*

$0,012345 = 1,2345 \times 10^{-2}$ *$10^{-2} = 0,01$*

$123,45 \times 10^5 = 1,2345 \times 10^2 \times 10^5 = 1,2345 \times 10^7$

Remarque

Pour faire un calcul avec des nombres en notation scientifique (où apparaissent uniquement des quotients ou produits), on commence par regrouper les nombres décimaux et les puissances de 10.

Exemples

$12 \times 10^4 \times 55 \times 10^8 = 12 \times 55 \times 10^4 \times 10^8 = 660 \times 10^{12} = 6{,}6 \times 10^2 \times 10^{12} = 6{,}6 \times 10^{14}$

$25 \times 10^{-14} \times (-400) \times 10^8 = 25 \times (-400) \times 10^{-14} \times 10^8 = -10000 \times 10^{-6} = -1 \times 10^4 \times 10^{-6} = -1 \times 10^{-2}$

$0{,}0055 \times 10^7 \times 2 \times 10^8 = 0{,}0055 \times 2 \times 10^7 \times 10^8 = 0{,}011 \times 10^{15} = 1{,}1 \times 10^{-2} \times 10^{15} = 1{,}1 \times 10^{13}$

$$\frac{45 \times 10^{23} \times 24 \times 10^{-4}}{18 \times 10^5} = \frac{45 \times 24}{18} \times \frac{10^{23} \times 10^{-4}}{10^5} = \frac{1080}{18} \times \frac{10^{19}}{10^5} = 60 \times 10^{14} = 6 \times 10^1 \times 10^{14} = 6 \times 10^{15}$$

Utilisation de la calculatrice

Pour calculer avec des puissances on utilise la touche :

$\boxed{\blacksquare^{\blacksquare}}$ $\boxed{x^{\blacksquare}}$ $\boxed{x^y}$ $\boxed{x^n}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{\wedge}$ $\boxed{\uparrow}$

Dans la suite, on nommera $\boxed{x^{\blacksquare}}$ cette touche.

Pour calculer $5^3 \times 2 - (2-5)^4$ on tape 5 $\boxed{x^{\blacksquare}}$ 3 × 2 - (2 - 5) $\boxed{x^{\blacksquare}}$ 4 et on trouve 169.

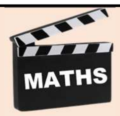
Pour calculer avec des puissances on utilise la touche :

$\boxed{\times 10^{\blacksquare}}$ $\boxed{\times 10^x}$ $\boxed{\times 10^n}$ $\boxed{\text{EXP}}$ $\boxed{\text{EE}}$

Dans la suite, on nommera $\boxed{\times 10^{\blacksquare}}$ cette touche. Elle remplace l'appui sur les touches $\boxed{\times}$ 10 $\boxed{x^{\blacksquare}}$

Pour calculer $12 \times 10^4 \times 55 \times 10^8$ on tape 12 $\boxed{\times 10^{\blacksquare}}$ 4 × 55 $\boxed{\times 10^{\blacksquare}}$ 8 et on trouve $6{,}6 \times 10^{14}$.

https://www.lesmathsdherve.net/puissances-parcours-differencies-2/



https://www.lesmathsdherve.net/puissances-videos-2/

https://www.lesmathsdherve.net/puissances-aides/