PROBABILITES

Exemple des pièces

On lance une pièce de monnaie. On recommence l'expérience.

Voici les résultats obtenus par des élèves de troisième :

Nombre de piles	Nombre de faces	Total
4 374	4 626	9 000

Définitions

On appelle *effectif total* le nombre de valeurs ou expériences.

Par exemple, la série des pièces a un effectif total de 9 000 car on a effectué 9 000 tirages (4374+4626).

On appelle *effectif de A* le nombre de fois où A apparaît.

Par exemple, pour la série des pièces l'effectif de "pile" est 4374 et l'effectif de "face" est 4626.

On appelle *fréquence de A* le quotient de l'effectif de A par l'effectif total.

$$\textbf{Fréquence de A} = \frac{\textbf{Effectif de A}}{\textbf{Effectif total}}$$

Par exemple, la fréquence de « Pile » est $\frac{4\,374}{9\,000} \approx \mathbf{0,486}$ et la fréquence de « Face » est $\frac{4\,626}{9\,000} \approx \mathbf{0,514}$.

Remarque

Les fréquences sont souvent exprimées en pourcentage.

Méthode 1	Méthode 2	Méthode 3
$\mathbf{0,486} = \frac{\mathbf{48,6}}{\mathbf{100}}$	<table><tr><td>Pile</td><td>4 374</td><td>?</td></tr><tr><td>Total</td><td>9 000</td><td>100</td></tr></table> $? = \frac{\mathbf{4\,374}\ \times}{\mathbf{9\,000}}$ $? = \frac{\mathbf{4\,374}\ \times \mathbf{100}}{\mathbf{9\,000}} \approx \mathbf{48,6}$	$\textbf{Fréquence de A en \%} = \frac{\textbf{Effectif de A}}{\textbf{Effectif total}} \times \mathbf{100}$ $\textbf{Fréquence de "pile" en \%} = \frac{\mathbf{4\,374}}{\mathbf{9\,000}} \times \mathbf{100} \approx \mathbf{48,6}$

La fréquence de « Pile » est d'environ 48,6%.

Définitions

Une expérience est dite *aléatoire* si on ne peut pas prévoir l'issue de cette expérience.

Les différents résultats d'une expérience sont appelés les *issues*.

Exemple des pièces

Les issues possibles sont "pile" ou "face". On a une chance sur deux d'obtenir une des deux issues. Elles ont la même probabilité de survenir. On dira que la probabilité d'obtenir "pile" est $\frac{1}{2}$ et que la probabilité d'obtenir "face" est $\frac{1}{2}$.

On notera p(Pile) = $\frac{1}{2}$ et p(Face) = $\frac{1}{2}$.

p comme probabilité

Remarque importante

Si on effectue de "nombreux" tirages, la fréquence d'apparition d'une issue se rapproche de la valeur théorique que l'on appelle probabilité.

Exemple des pièces reproduit sur ordinateur

Nombre de tirages	10	50	100	500	1000	5000	10000	50000	100000	1000000
Nombre de "Pile"	2	23	46	240	494	2470	4908	24853	49914	500 557
Fréquence de "Pile" en %	20	46	46	48	49,4	49,4	49,08	49,706	49,914	50, 0557
Ecart avec la probabilité	30	4	4	2	0,6	0,6	0,92	0,294	0,086	0,0557

Exemple des dés

On tire deux dés et on effectue leur somme.

Les issues possibles sont : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 et 12.

On a répété de nombreuses fois l'expérience en 3ème.

Voici les résultats de l'expérience :

Somme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Effectif	73	156	223	335	410	445	367	288	208	182	101	2788
Fréquence en %	2,62 %	5,60 %	8,00 %	12,02 %	14,71 %	15,96 %	13,16 %	10,33 %	7,46 %	6,53 %	3,62 %	100 %

Les issues n'apparaissent pas avec la même fréquence.

Le premier dé a 6 issues possibles et le second aussi. Au total, il y a 6×6 issues possibles pour la somme ... mais certaines sont identiques :

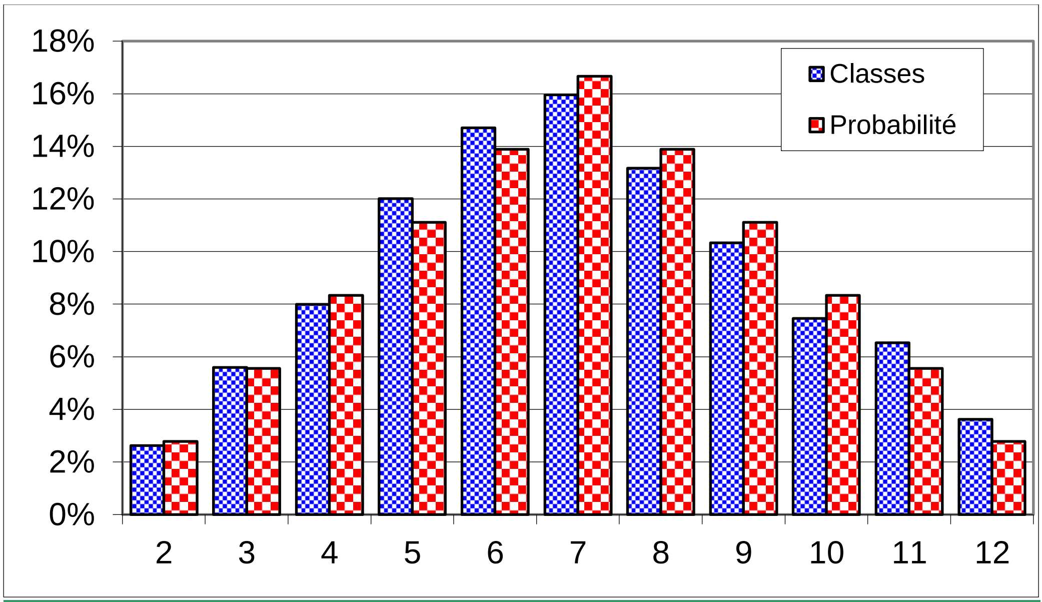
+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

p(2) = p(12) = 1/36 ≈ 2,8% p(3) = p(11) = 2/36 ≈ 5,6%

p(4) = p(10) = 3/36 ≈ 8,3 % p(5) = p(9) = 4/36 ≈ 11,1%

p(6) = p(8) = 5/36 ≈ 13,9 % p(7) = 6/36 ≈ 16,7%

Somme	Issues possibles dé rouge + dé vert	Nombre d'issues possibles	Probabilité
2	1+1	1	1/36 ≈ 2,8%
3	1+2=2+1	2	2/36 ≈ 5,6%
4	1+3=2+2=3+1	3	3/36 ≈ 8,3 %
5	1+4=2+3=3+2=4+1	4	4/36 ≈ 11,1%
6	1+5=2+4=3+3=4+2=5+1	5	5/36 ≈ 13,9%
7	1+6=2+5=3+4=4+3=5+2=6+1	6	6/36 ≈ 16,7%
8	2+6=3+5=4+4=5+3=6+2	5	5/36 ≈ 13,9%
9	3+6=4+5=5+4=6+3	4	4/36 ≈ 11,1%
10	4+6=5+5=6+4	3	3/36 ≈ 8,3%
11	5+6=6+5	2	2/36 ≈ 5,6%
12	6+6	1	1/36 ≈ 2,8%
Total		36	1



Propriété admise

La somme des probabilités de toutes les issues possibles est toujours 1.

Définitions

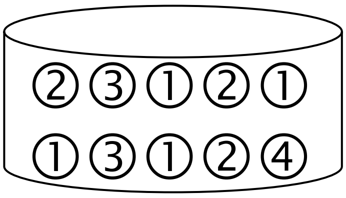
Un *événement* est constitué d'une (ou plusieurs) issue(s) d'une expérience aléatoire ; on dit qu'une de ces issues réalise l'évènement.

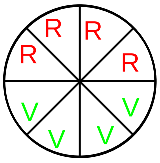
Deux événements sont dits *incompatibles* s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps.

Exemple des dés

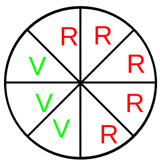
- Soit A l'événement "on obtient un résultat strictement inférieur à 5".
  Les issues qui réalisent cet événement sont 2, 3 et 4.
  p(A) = $\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ *On ajoute les probabilités car les issues sont incompatibles.*
- Soit B l'événement "on obtient un nombre pair".
  Les issues qui réalisent cet événement sont 2, 4, 6, 8, 10 et 12.
  p(B) = $\frac{1}{36}+\frac{3}{36}+\frac{5}{36}+\frac{5}{36}+\frac{3}{36}+\frac{1}{36}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$
- Soit C l'événement "on obtient un nombre impair".
  Les issues qui réalisent cet événement sont 3, 5, 7, 9 et 11
  p(C) = $\frac{2}{36}+\frac{4}{36}+\frac{6}{36}+\frac{4}{36}+\frac{2}{36}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$

Exemple d'expérience à deux épreuves





roue A



roue B

Une urne contient des boules numérotées de 1 à 4.

On tire une boule au hasard et on lit la valeur de la boule.

Si la boule est paire, on tourne la roue A ; si la boule est impaire, on tourne la roue B. Les roues sont colorées en rouge et vert.

Dans l'urne, les issues possibles sont 1, 2, 3 ou 4.

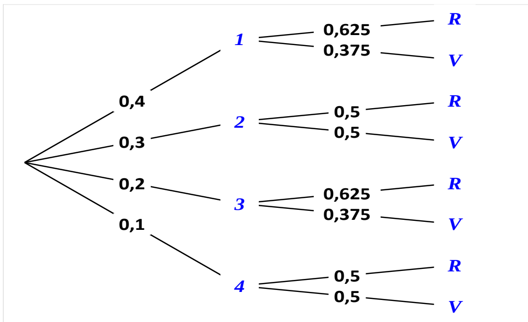
Valeur de la boule	1	2	3	4	Total
Effectif	4	3	2	1	10

On a p(1) = $\frac{4}{10}$ = 0,4 et p(2) = $\frac{3}{10}$ = 0,3 et p(3) = $\frac{2}{10}$ = 0,2 et p(4) = $\frac{1}{10}$ = 0,1.

Sur la roue A, on a p(R) = $\frac{4}{8}$ = 0,5 et p(V) = $\frac{4}{8}$ = 0,5.

Sur la roue B, on a p(R) = $\frac{5}{8}$ = 0,625 et p(V) = $\frac{3}{8}$ = 0,375.

On peut représenter l'ensemble de ces résultats par un arbre :



Définitions

Deux événements sont dits *contraires* si la somme de leur probabilité vaut 1.

Le contraire de l'événement A est noté $\bar{\mathbf{A}}$.

L'événement contraire de « il pleut » est « il ne pleut pas »

Un événement est dit *certain* si sa probabilité vaut 1.

Exemple de l'expérience à deux épreuves

Soit A l'évènement "obtenir 1 et rouge".
p(A) = 0,4 × 0,625 = 0,25

Soit B l'évènement "obtenir 2 et rouge".
p(B) = 0,3 × 0,5 = 0,15

Soit C l'évènement "obtenir 3 et rouge".
p(C) = 0,2 × 0,625 = 0,125

Soit D l'évènement "obtenir 4 et rouge".
p(D) = 0,1 × 0,5 = 0,05

Soit C l'évènement "obtenir 3 et rouge".

$p(C) = 0{,}2 \times 0{,}625 = 0{,}125$

Soit D l'évènement "obtenir 4 et rouge".

$p(D) = 0{,}1 \times 0{,}5 = 0{,}05$

Soit R l'événement "obtenir rouge"

Comme A, B, C et D sont incompatibles,
alors p(R) = p(A) + p(B) + p(C) + p(D),
donc p(R) = 0,25 + 0,15 + 0,125 + 0,05 = 0,575.

Soit V l'événement "obtenir vert".

V et R sont contraires donc $V = \overline{\mathbf{R}}$

donc $p(V) = p(\overline{\mathbf{R}}) = 1 - p(R) = 1 - 0{,}575 = 0{,}425$

Exemple de problème

- On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir un cœur ? un roi ? un roi de cœur ?

- Soit A l'événement "tirer un cœur".

$p(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

Soit B l'événement "tirer un roi".

$p(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

Soit C l'événement "tirer un roi de cœur".

$p(C) = \frac{1}{32}$

ou $p(C) = p(A) \times p(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$

Exemple des anniversaires

On cherche quelle est la probabilité que, au moins, deux personnes d'un groupe fêtent leur anniversaire le même jour.

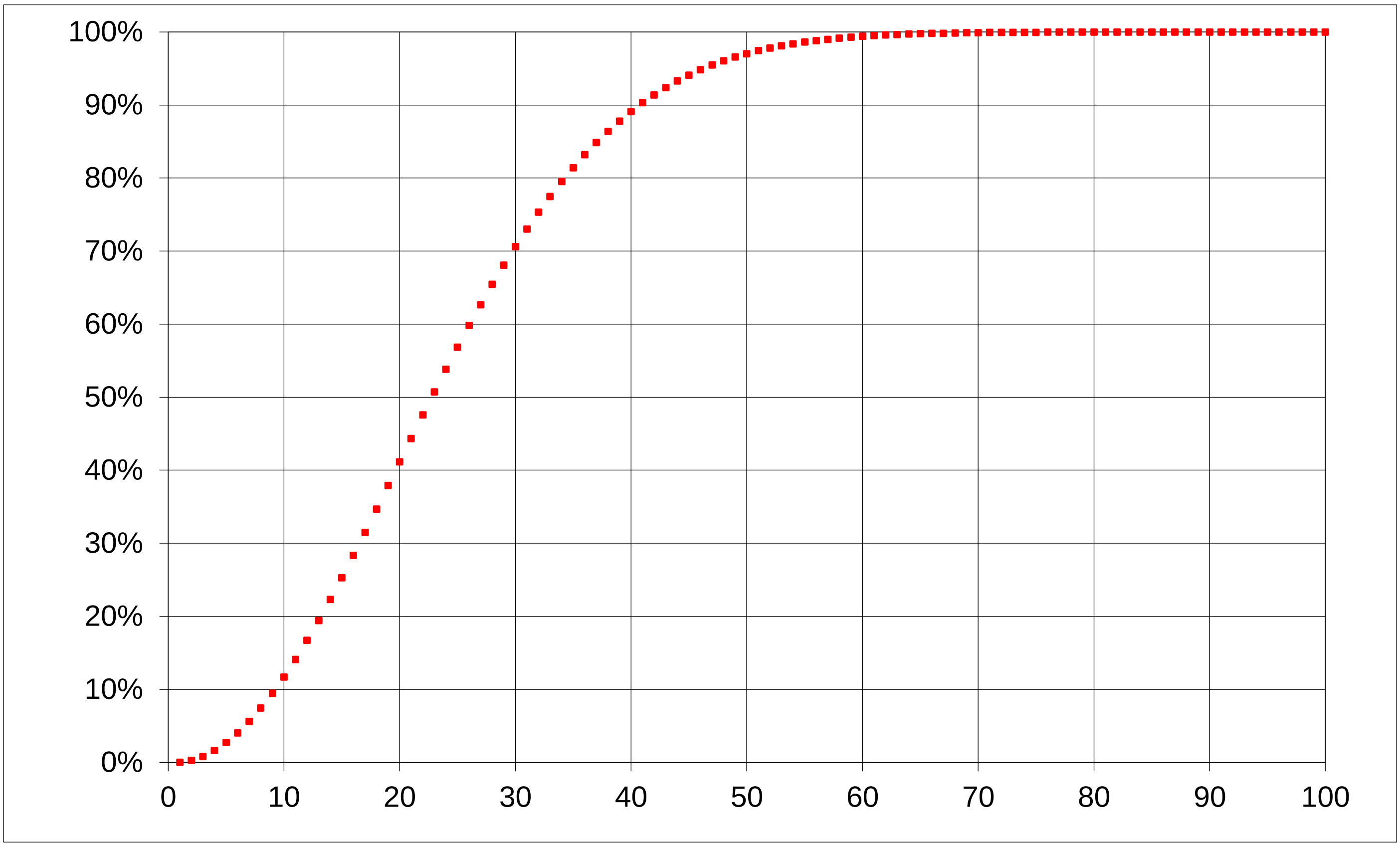
On appelle A l'événement « les personnes ont des anniversaires à des jours tous différents » et B l'événement « au moins 2 personnes fêtent leur anniversaire le même jour ».

A et B sont contraires donc p(B) = 1 – p(A).

Pour la 1$^{\text{ère}}$ personne, on a 365 jours possibles pour son anniversaire sur les 365 de l'année.
Pour la 2$^{\text{nde}}$ personne, on a 364 jours possibles pour son anniversaire sur les 365 de l'année.
Pour la 3$^{\text{ème}}$ personne, on a 363 jours possibles pour son anniversaire sur les 365 de l'année.
Pour la 4$^{\text{ème}}$ personne, on a 362 jours possibles pour son anniversaire sur les 365 de l'année.

Nombre de personnes	*p*(A)	*p*(B)
1	$\frac{365}{365} = 1$	1-1 = 0%
2	$\frac{365}{365} \times \frac{364}{365} = \frac{132860}{133225}$	$1 - \frac{132860}{133225} = \frac{1}{365} \approx 0{,}27\ \%$
3	$\frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} = \frac{48228180}{48627125}$	$1 - \frac{48228180}{48627125} = \frac{398645}{48627125} \approx 0{,}82\ \%$
4	$\frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} = \frac{17458601160}{17748900625}$	$1 - \frac{17458601160}{17748900625} = \frac{290299465}{17748900625} \approx 1{,}64\ \%$
5	97,29%	2,71%
6	95,95%	4,05%
7	94,38%	5,62%
8	92,57%	7,43%
9	90,54%	9,46%
10	88,31%	11,69%
11	85,89%	14,11%
12	83,30%	16,70%
13	80,56%	19,44%
14	77,69%	22,31%
15	74,71%	25,29%
16	71,64%	28,36%
17	68,50%	31,50%
18	65,31%	34,69%
19	62,09%	37,91%
20	58,86%	41,14%
21	55,63%	44,37%
22	52,43%	47,57%
23	49,27%	50,73%
24	46,17%	53,83%
25	43,13%	56,87%
26	40,18%	59,82%
27	37,31%	62,69%
28	34,55%	65,45%

29	31,90%	68,10%
30	29,37%	70,63%
40	10,88%	89,12%
50	2,96%	97,04%
60	0,59%	99,41%
70	0,08%	99,92%
80	0,01%	99,99%
90	0,00%	100,00%



PARCOURS DIFFÉRENCIÉS

https://www.lesmathsdherve.net/probabilites-parcours-differencies/

MATHS

https://www.lesmathsdherve.net/probabilites-videos/

https://www.lesmathsdherve.net/probabilites-aide/