

# PROBABILITES

## Exemple des pièces

On lance une pièce de monnaie. On recommence l'expérience.

Voici les résultats obtenus par des élèves de troisième :

Nombre de piles	Nombre de faces	Total
4 374	4 626	9 000

## Définitions

On appelle *effectif total* le nombre de valeurs ou expériences.

Par exemple, la série des pièces a un effectif total de 9 000 car on a effectué 9 000 tirages (4374+4626).

On appelle *effectif de A* le nombre de fois où A apparaît.

Par exemple, pour la série des pièces l'effectif de "pile" est 4374 et l'effectif de "face" est 4626.

On appelle *fréquence de A* le quotient de l'effectif de A par l'effectif total.

$$\text{Fréquence de A} = \frac{\text{Effectif de A}}{\text{Effectif total}}$$

Par exemple, la fréquence de « Pile » est  $\frac{4\,374}{9\,000} \approx 0,486$  et la fréquence de « Face » est  $\frac{4\,626}{9\,000} \approx 0,514$ .

## Remarque

Les fréquences sont souvent exprimées en pourcentage.

Méthode 1	Méthode 2	Méthode 3						
$0,486 = \frac{48,6}{100}$	<table border="1"> <tr> <td>Pile</td> <td>4 374</td> <td>?</td> </tr> <tr> <td>Total</td> <td>9 000</td> <td>100</td> </tr> </table>	Pile	4 374	?	Total	9 000	100	$\text{Fréquence de A en \%} = \frac{\text{Effectif de A}}{\text{Effectif total}} \times 100$
Pile	4 374	?						
Total	9 000	100						
	$? = \frac{4\,374 \times}{9\,000}$ $? = \frac{4\,374 \times 100}{9\,000} \approx 48,6$	$\text{Fréquence de "pile" en \%} = \frac{4\,374}{9\,000} \times 100 \approx 48,6$						

La fréquence de « Pile » est d'environ 48,6%.

## Définitions

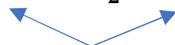
Une expérience est dite *aléatoire* si on ne peut pas prévoir l'issue de cette expérience.

Les différents résultats d'une expérience sont appelés les *issues*.

## Exemple des pièces

Les issues possibles sont "pile" ou "face". On a une chance sur deux d'obtenir une des deux issues. Elles ont la même probabilité de survenir. On dira que la probabilité d'obtenir "pile" est  $\frac{1}{2}$  et que la probabilité d'obtenir "face" est  $\frac{1}{2}$ .

On notera  $p(\text{Pile}) = \frac{1}{2}$  et  $p(\text{Face}) = \frac{1}{2}$ .

  
p comme probabilité

## Remarque importante

Si on effectue de "nombreux" tirages, la fréquence d'apparition d'une issue se rapproche de la valeur théorique que l'on appelle probabilité.

## Exemple des pièces reproduit sur ordinateur

Nombre de tirages	10	50	100	500	1000	5000	10000	50000	100000	1000000
Nombre de "Pile"	2	23	46	240	494	2470	4908	24853	49914	500 557
Fréquence de "Pile" en %	20	46	46	48	49,4	49,4	49,08	49,706	49,914	50,0557
Ecart avec la probabilité	30	4	4	2	0,6	0,6	0,92	0,294	0,086	0,0557

### Exemple des dés

On tire deux dés et on effectue leur somme.

Les issues possibles sont : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 et 12.

On a répété de nombreuses fois l'expérience en 3<sup>ème</sup>.

Voici les résultats de l'expérience :

Somme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Effectif	73	156	223	335	410	445	367	288	208	182	101	2788
Fréquence en %	2,62 %	5,60 %	8,00 %	12,02 %	14,71 %	15,96 %	13,16 %	10,33 %	7,46 %	6,53 %	3,62 %	100 %

Les issues n'apparaissent pas avec la même fréquence.

Le premier dé a 6 issues possibles et le second aussi. Au total, il y a 6x6 issues possibles pour la somme ... mais certaines sont identiques :

$$p(2) = p(12) = 1/36 \approx 2,8\%$$

$$p(4) = p(10) = 3/36 \approx 8,3\%$$

$$p(6) = p(8) = 5/36 \approx 13,9\%$$

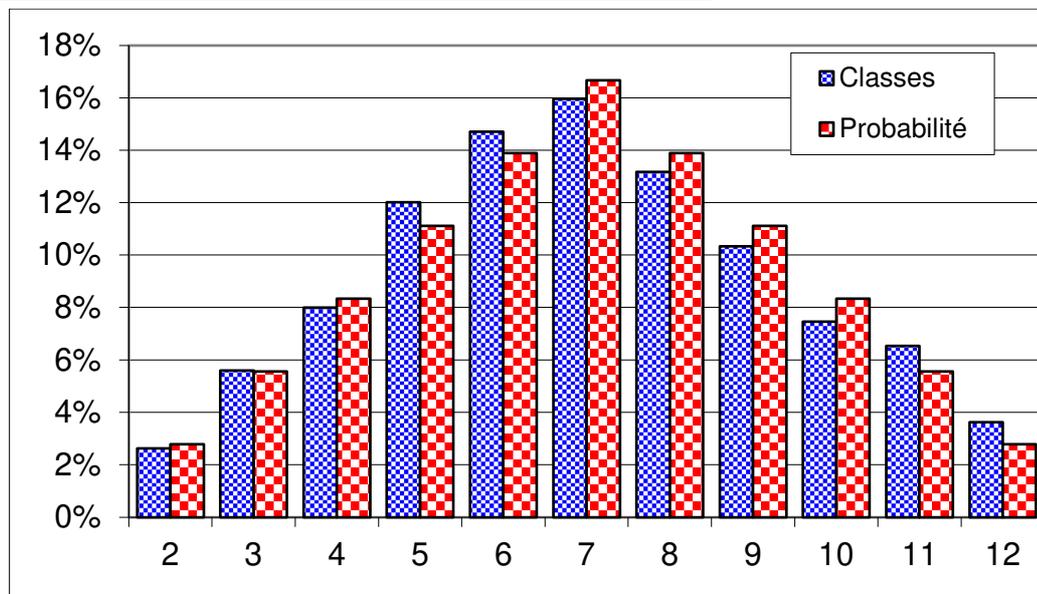
$$p(3) = p(11) = 2/36 \approx 5,6\%$$

$$p(5) = p(9) = 4/36 \approx 11,1\%$$

$$p(7) = 6/36 \approx 16,7\%$$

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Somme	Issues possibles dé rouge + dé vert	Nombre d'issues possibles	Probabilité
2	1+1	1	1/36 ≈ 2,8%
3	1+2=2+1	2	2/36 ≈ 5,6%
4	1+3=2+2=3+1	3	3/36 ≈ 8,3 %
5	1+4=2+3=3+2=4+1	4	4/36 ≈ 11,1%
6	1+5=2+4=3+3=4+2=5+1	5	5/36 ≈ 13,9%
7	1+6=2+5=3+4=4+3=5+2=6+1	6	6/36 ≈ 16,7%
8	2+6=3+5=4+4=5+3=6+2	5	5/36 ≈ 13,9%
9	3+6=4+5=5+4=6+3	4	4/36 ≈ 11,1%
10	4+6=5+5=6+4	3	3/36 ≈ 8,3%
11	5+6=6+5	2	2/36 ≈ 5,6%
12	6+6	1	1/36 ≈ 2,8%
Total		36	1



**Propriété admise**

La somme des probabilités de toutes les issues possibles est toujours 1.

**Définitions**

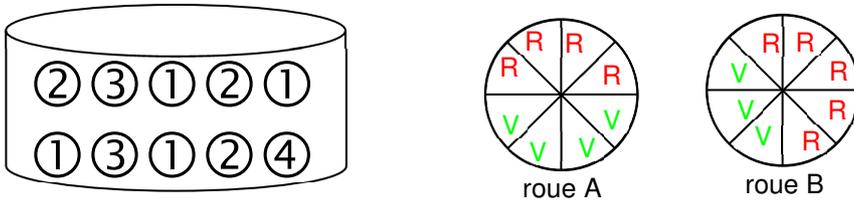
Un événement est constitué d'une (ou plusieurs) issue(s) d'une expérience aléatoire ; on dit qu'une de ces issues réalise l'évènement.

Deux événements sont dits *incompatibles* s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps.

**Exemple des dés**

- ▶ Soit A l'évènement "on obtient un résultat strictement inférieur à 5".  
Les issues qui réalisent cet évènement sont 2, 3 et 4.  
 $p(A) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$  On ajoute les probabilités car les issues sont incompatibles.
- ▶ Soit B l'évènement "on obtient un nombre pair".  
Les issues qui réalisent cet évènement sont 2, 4, 6, 8, 10 et 12.  
 $p(B) = \frac{1}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{3}{36} + \frac{1}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$
- ▶ Soit C l'évènement "on obtient un nombre impair".  
Les issues qui réalisent cet évènement sont 3, 5, 7, 9 et 11  
 $p(C) = \frac{2}{36} + \frac{4}{36} + \frac{6}{36} + \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

**Exemple d'expérience à deux épreuves**



Une urne contient des boules numérotées de 1 à 4.  
On tire une boule au hasard et on lit la valeur de la boule.

Si la boule est paire, on tourne la roue A ; si la boule est impaire, on tourne la roue B. Les roues sont colorées en rouge et vert.

Dans l'urne, les issues possibles sont 1, 2, 3 ou 4.

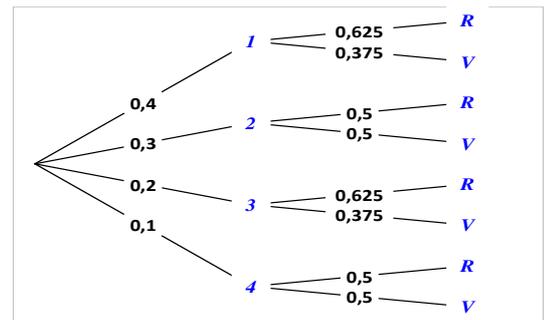
Valeur de la boule	1	2	3	4	Total
Effectif	4	3	2	1	10

On a  $p(1) = \frac{4}{10} = 0,4$  et  $p(2) = \frac{3}{10} = 0,3$  et  $p(3) = \frac{2}{10} = 0,2$  et  $p(4) = \frac{1}{10} = 0,1$ .

Sur la roue A, on a  $p(R) = \frac{4}{8} = 0,5$  et  $p(V) = \frac{4}{8} = 0,5$ .

Sur la roue B, on a  $p(R) = \frac{5}{8} = 0,625$  et  $p(V) = \frac{3}{8} = 0,375$ .

On peut représenter l'ensemble de ces résultats par un arbre :



**Définitions**

Deux événements sont dits *contraires* si la somme de leur probabilité vaut 1.

Le contraire de l'évènement A est noté  $\bar{A}$ .

L'évènement contraire de « il pleut » est « il ne pleut pas »

Un événement est dit *certain* si sa probabilité vaut 1.

**Exemple de l'expérience à deux épreuves**

Soit A l'évènement "obtenir 1 et rouge".

$p(A) = 0,4 \times 0,625 = 0,25$

Soit B l'évènement "obtenir 2 et rouge".

$p(B) = 0,3 \times 0,5 = 0,15$

Soit C l'évènement "obtenir 3 et rouge".

$p(C) = 0,2 \times 0,625 = 0,125$

Soit D l'évènement "obtenir 4 et rouge".

$p(D) = 0,1 \times 0,5 = 0,05$

Comme A, B, C et D sont incompatibles, alors  $p(R) = p(A) + p(B) + p(C) + p(D)$ ,  
donc  $p(R) = 0,25 + 0,15 + 0,125 + 0,05 = 0,575$ .

Soit V l'événement "obtenir vert".

V et R sont contraires donc  $V = \bar{R}$

donc  $p(V) = p(\bar{R}) = 1 - p(R) = 1 - 0,575 = 0,425$

### Exemple de problème

► On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir un cœur ?  
un roi ? un roi de cœur ?

► Soit A l'événement "tirer un cœur".

$$p(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

Soit B l'événement "tirer un roi".

$$p(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

Soit C l'événement "tirer un roi de cœur".

$$p(C) = \frac{1}{32}$$

ou  $p(C) = p(A) \times p(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$

### Exemple des anniversaires

On cherche quelle est la probabilité que, au moins, deux personnes d'un groupe fêtent leur anniversaire le même jour.

On appelle A l'événement « les personnes ont des anniversaires à des jours tous différents » et B l'événement « au moins 2 personnes fêtent leur anniversaire le même jour ».

A et B sont contraires donc  $p(B) = 1 - p(A)$ .

Pour la 1<sup>ère</sup> personne, on a 365 jours possibles pour son anniversaire sur les 365 de l'année.

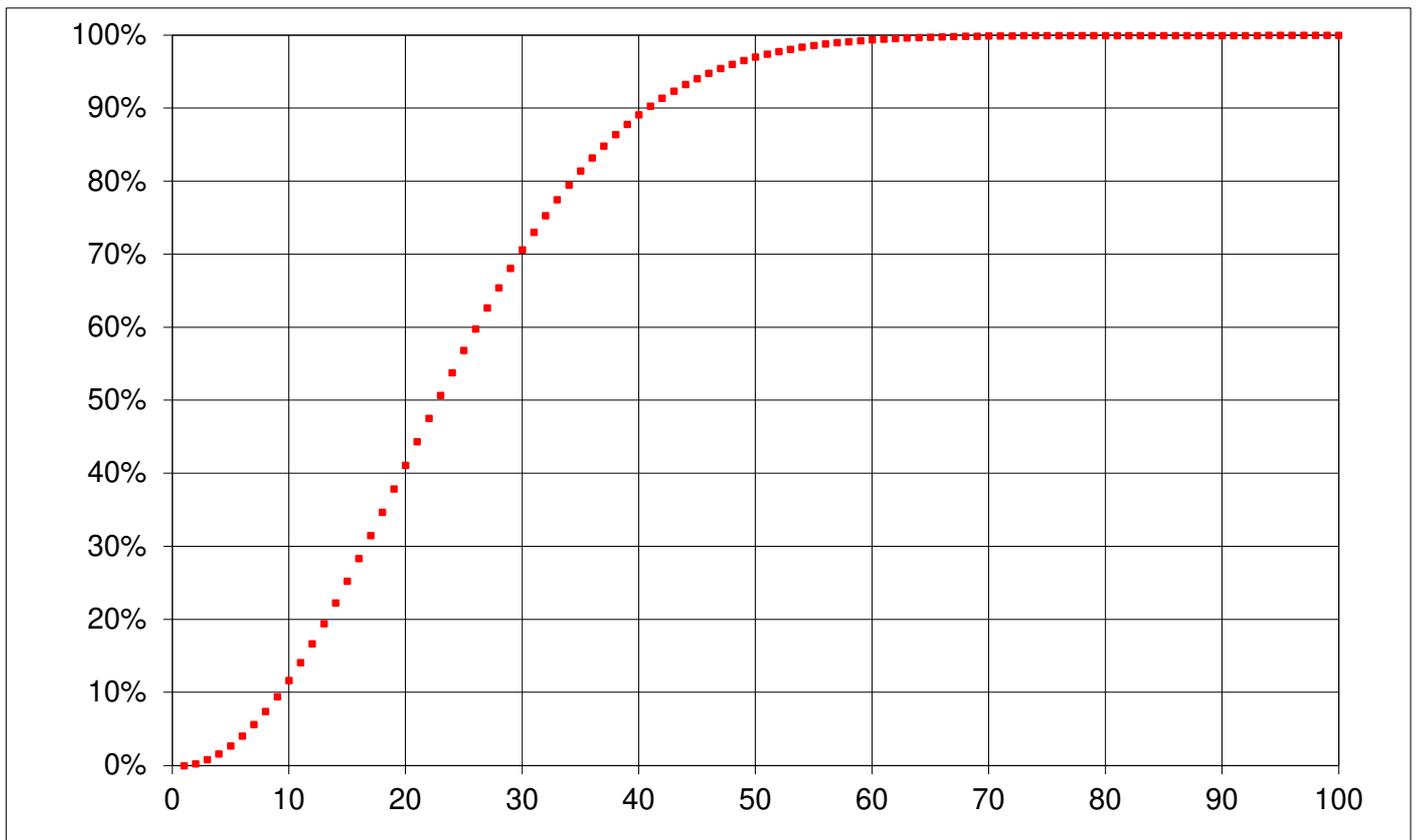
Pour la 2<sup>nde</sup> personne, on a 364 jours possibles pour son anniversaire sur les 365 de l'année.

Pour la 3<sup>ème</sup> personne, on a 363 jours possibles pour son anniversaire sur les 365 de l'année.

Pour la 4<sup>ème</sup> personne, on a 362 jours possibles pour son anniversaire sur les 365 de l'année.

Nombre de personnes	$p(A)$	$p(B)$
1	$\frac{365}{365} = 1$	$1 - 1 = 0\%$
2	$\frac{365}{365} \times \frac{364}{365} = \frac{132860}{133225}$	$1 - \frac{132860}{133225} = \frac{1}{365} \approx 0,27\%$
3	$\frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} = \frac{48228180}{48627125}$	$1 - \frac{48228180}{48627125} = \frac{398645}{48627125} \approx 0,82\%$
4	$\frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} = \frac{17458601160}{17748900625}$	$1 - \frac{17458601160}{17748900625} = \frac{290299465}{17748900625} \approx 1,64\%$
5	97,29%	2,71%
6	95,95%	4,05%
7	94,38%	5,62%
8	92,57%	7,43%
9	90,54%	9,46%
10	88,31%	11,69%
11	85,89%	14,11%
12	83,30%	16,70%
13	80,56%	19,44%
14	77,69%	22,31%
15	74,71%	25,29%
16	71,64%	28,36%
17	68,50%	31,50%
18	65,31%	34,69%
19	62,09%	37,91%
20	58,86%	41,14%
21	55,63%	44,37%
22	52,43%	47,57%
23	49,27%	50,73%
24	46,17%	53,83%
25	43,13%	56,87%
26	40,18%	59,82%
27	37,31%	62,69%
28	34,55%	65,45%
29	31,90%	68,10%
30	29,37%	70,63%

40	10,88%	89,12%
50	2,96%	97,04%
60	0,59%	99,41%
70	0,08%	99,92%
80	0,01%	99,99%
90	0,00%	100,00%



**PARCOURS DIFFÉRENCIÉS**




<https://www.lesmathsdherve.net/probabilites-parcours-differencies/>

**MATHS**




<https://www.lesmathsdherve.net/probabilites-videos/>




<https://www.lesmathsdherve.net/probabilites-aide/>