FONCTIONS AFFINES et LINEAIRES, pourcentages

Fonctions affines et linéaires

Définition

Soit p et q deux nombres.
Une fonction est dite **linéaire** si elle peut se mettre sous la forme $f(x) = p \times x$
Une fonction est dite **affine** si elle peut se mettre sous la forme $f(x) = p \times x + q$

Exemples

Fonction	Linéaire ?	Affine ?
$f(x) = 3x$	Oui	Oui car $3x = 3x + 0$
$g(x) = -6x$	Oui	Oui car $-6x = -6x + 0$
$h(x) = 5x + 3$	Non	Oui
$i(x) = 7$	Non	Oui car $7 = 0x + 7$
$j(x) = \cos(x)$	Non	Non
$k(x) = x^2$	Non	Non

Propriété admise

Une situation de proportionnalité de coefficient p

- a une représentation graphique qui est une droite qui passe par l'origine du repère,
- correspond à la fonction linéaire $f(x) = p\,x$.

Soit $f(x) = p\,x + q$ une fonction affine.
Sa représentation graphique est une droite.

Exemple

Gabriel souhaite acheter des fraises pour faire de la confiture. Sur le marché, il a trouvé des fraises de France à 2,5€ le kilogramme.

Le prix des fraises est proportionnel à la masse de fraises.
Le coefficient de proportionnalité est 2,5.
On appelle x la masse de fraises en kilogrammes.
Cela correspond à la fonction linéaire $f(x) = 2{,}5\,x$.

Marine est plus courageuse. Elle a trouvé un producteur qui lui offre de ramasser ses fraises pour 1,5€ le kilogramme après paiement d'une redevance forfaitaire de 20€.

Le prix des fraises chez ce producteur est donné par la fonction affine $g(x) = 1{,}5\,x + 20$.

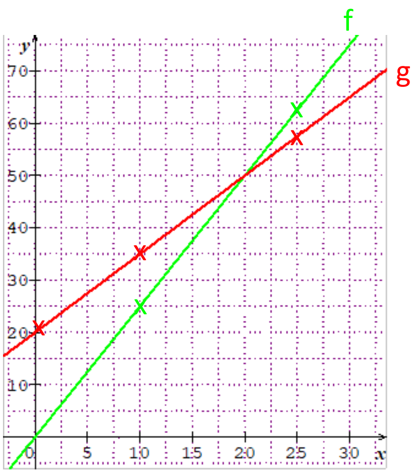
Comment tracer la représentation graphique d'une fonction linéaire ou affine ?

Comme leurs représentations graphiques sont des droites, il suffit de placer 2 points.
Afin de vérifier, il est intéressant d'en placer 3.
On construit donc un tableau de valeur avec 3 points.

Exemple des fraises

$f(x) = 2{,}5\,x$ $\qquad$ $g(x) = 1{,}5\,x + 20$

x	0	10	25
$f(x)$	0	25	62,5
$g(x)$	20	35	57,5



Comment déterminer les antécédents d'un nombre par une fonction affine ?

On cherche les antécédents de a par la fonction affine $f(x) = p\,x + q$
Il suffit de résoudre l'équation $p\,x + q = a$

Exemple des fraises

On cherche combien Marine peut acheter de fraises avec 38€.

On cherche les antécédents de 38 donc les nombres x tels que g(x) = 38 donc 1,5 x + 20 = 38

$1{,}5\,x + 20 = 38$

$1{,}5\,x = 18$

$x = 12$

L'antécédent de 38 est 12.

On interprète ce résultats en disant que Marie peut donc acheter 12kg de fraises.

Propriété

Soit f(x) = $p\,x + q$ une fonction affine.

La représentation graphique de f passe par le point de coordonnées (0 ; q).

Le nombre q est appelé *ordonnée à l'origine*.

Si x augmente de 1 alors f(x) augmente de p.

Le nombre p est appelé *coefficient directeur*

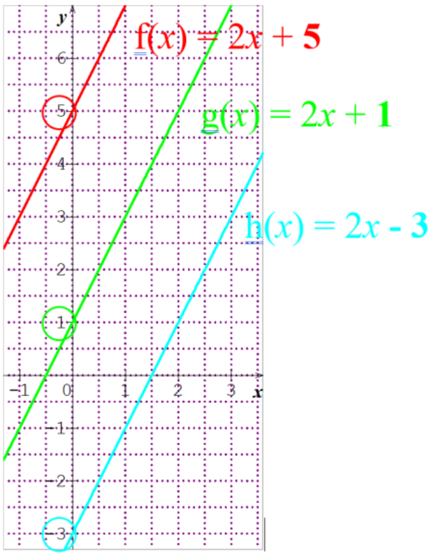
Démonstration

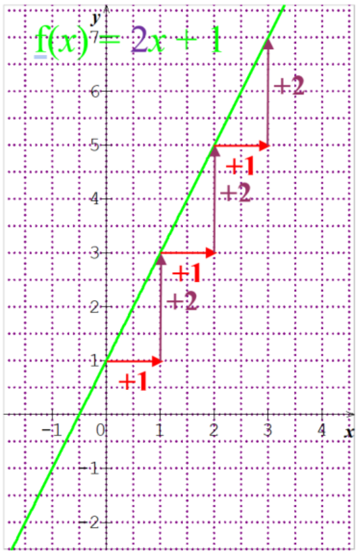
Si $x = 0$ alors $f(x) = f(0) = p \times 0 + q = q$, donc si $x = 0$ alors la représentation graphique de f passe par le point de coordonnées (0 ; q).

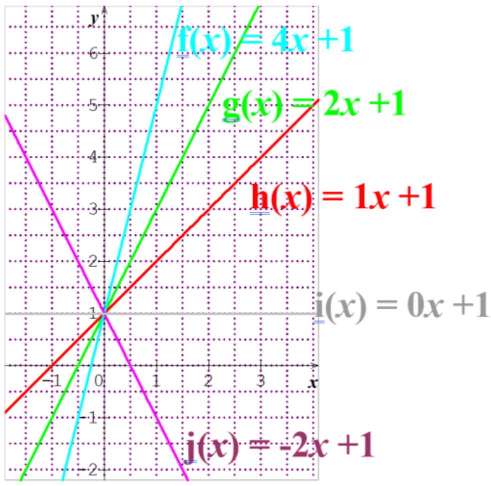
$f(x + 1) = p\,(x + 1) + q = p\,x + p + q = p\,x + q + p = f(x) + p$

Donc si x augmente de 1 alors f(x) augmente de p.

Exemples







Remarque

Deux fonctions qui ont le même coefficient directeur ont des représentations graphiques qui sont parallèles.

Propriété

Soit f(x) = $p\,x + q$ une fonction affine.

Soit x_1 et x_2 deux nombres et f(x_1) et f(x_2) leurs images.

$$p = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Démonstration

$f(x_1) = p\,x_1 + q \qquad f(x_2) = p\,x_2 + q$

$f(x_2) - f(x_1) = p\,x_2 + q - (p\,x_1 + q)$

$f(x_2) - f(x_1) = p\,x_2 + q - p\,x_1 - q$

$f(x_2) - f(x_1) = p\,x_2 - p\,x_1$

$f(x_2) - f(x_1) = p\,(x_2 - x_1)$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = p$$

Exemple 1

Soit f(x) = $p\,x + q$ une fonction affine tel que f(2) = 5 et f(6) = 21 leurs images.
Trouver l'expression algébrique de f.

Comme f est une fonction affine, on peut utiliser la formule $\boldsymbol{p} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ avec $x_1 = 2$, f(x_1) = 5 , $x_2 = 6$ et f(x_2) = 21.

On a $\boldsymbol{p} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(6)-f(2)}{6-2} = \frac{21-5}{6-2} = \frac{16}{4} = \mathbf{4}$

Donc f(x) = 4x + q.

Dans l'énoncé   On remplace x par 2 dans la formule f(x) = 4x + q

↓   ↓

On a f(2) = 5 et f(2) = 4 × 2 + q

donc 5 = 4 × 2 + q

donc 5 = 8 + q

donc -3 = q

donc $\boxed{f(x) = 4x - 3}$

<u>Exemple 2</u>

Soit A(4 ; 7) et B(6 ; 11) deux points.

Trouver l'expression algébrique de la fonction affine f dont la représentation graphique passe par les points A et B.

Soit C(5 ; 9) et D (8 ; 17)

Les points C et D appartiennent-ils à la droite (AB) ?

Soit f(x) = px + q la fonction affine dont la représentation graphique passe par les points A et B.

On a f(4) = 7 et f(6) = 11

On a $x_1 = 4$ et f(x_1) = 7 et $x_2 = 6$ et f(x_2) = 11

Comme f est une fonction affine, on peut utiliser la formule $\boldsymbol{p} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

Donc $\boldsymbol{p} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(6)-f(4)}{6-4} = \frac{11-7}{6-4} = \frac{4}{2} = \mathbf{2}$

Donc f(x) = 2x + q.

On a f(4) = 7 et f(4) = 2 × 4 + q

donc 7 = 2 × 4 + q

donc 7 = 8 + q

donc -1 = q

donc $\boxed{f(x) = 2x - 1}$

f(5) = 2 × 5 – 1 = 9 donc $\boxed{C \in (AB)}$.

f(8) = 2 × 8 – 1 = 15 ≠ 17 donc $\boxed{D \notin (AB)}$.

Soit M (x ; y) un point sur cette droite.

Les coordonnées de ce point vérifient l'équation y = 2x - 1 ; on dit que y = 2x - 1 est *l'équation de la droite* (AB).

Pourcentages

Rappel

Prendre une fraction d'une quantité, c'est multiplier la fraction par cette quantité.

Le mot français « de » se traduit en mathématiques par une multiplication.

Exemple

Prendre $\frac{3}{5}$ de 120€, c'est prendre $\frac{3}{5} \times 120 = 72$€.

Prendre 12% de 45€, c'est prendre $\frac{12}{100}$ de 45€, ce qui revient à prendre $\frac{12}{100} \times 45 = 5{,}40$€.

Comment calculer le produit d'une fraction par une quantité ?

$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} \times c = (\boldsymbol{a} \div \boldsymbol{b}) \times c$

$\frac{\boldsymbol{a}}{b} \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}) \div b$

$\frac{a}{\boldsymbol{b}} \times \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c} \div \boldsymbol{b}) \times a$

Exemples

$\frac{\mathbf{10}}{\mathbf{5}} \times 7 = (\mathbf{10} \div \mathbf{5}) \times 7 = \mathbf{2} \times 7 = 14$

$\frac{\mathbf{5}}{3} \times \mathbf{6} = (\mathbf{5} \times \mathbf{6}) \div 3 = \mathbf{30} \div 3 = 10$

$\frac{7}{\mathbf{5}} \times \mathbf{15} = (\mathbf{15} \div \mathbf{5}) \times 7 = \mathbf{3} \times 7 = 21$

Propriété

Ajouter $p\%$ à une quantité revient à la multiplier par $\left(1+\frac{p}{100}\right)$.

Soustraire $p\%$ à une quantité revient à la multiplier par $\left(1-\frac{p}{100}\right)$.

Démonstration

Soit Q la quantité.

$p\%$ de Q c'est $\frac{p}{100}\times Q$

Si on ajoute $p\%$ à Q, on trouve $Q+\frac{p}{100}\times Q=\left(1+\frac{p}{100}\right)\times Q$.

Si on soustrait $p\%$ à Q on trouve $Q-\frac{p}{100}\times Q=\left(1-\frac{p}{100}\right)\times Q$.

Exemple 1

Paule va en courses. Ce sont les soldes et les prix sont soldés à -15%.
Quel sera le prix soldé d'un gilet dont le prix normal est 74€ ?

Calculons le prix soldé.

$$74\times\left(1-\frac{15}{100}\right)=74\times 0{,}85=62{,}90$$

Le prix soldé est 62,90€.

Exemple 2

Le taux de TVA est de 33,3%.

a. *Le prix HT est de 126 €. Quel est le prix TTC ?*

b. *Le prix TTC est de 150 €. Quel est le prix HT ?*

Pour passer du prix HT au prix TTC, on multiplie par $1+\frac{33{,}3}{100}=1{,}333$ donc pour passer du prix TTC au prix HT, on divise par 1,333

a. Calculons le prix TTC.

$126\times 1{,}333\approx 167{,}96$

Le prix TTC est d'environ $\boxed{167{,}96\text{ €}}$.

b. Calculons le prix HT.

$150\div 1{,}333\approx 112{,}53$

Le prix HT est d'environ $\boxed{112{,}53\text{ €}}$.

PARCOURS DIFFÉRENCIÉS

https://www.lesmathsdherve.net/statistiques-parcours/

MATHS

https://www.lesmathsdherve.net/statistiques-videos-2/

https://www.lesmathsdherve.net/statistiques-aide/