

Fonctions affines et linéaires

Définition

Soit p et q deux nombres.

Une fonction est dite **linéaire** si elle peut se mettre sous la forme $f(x) = p \times x$

Une fonction est dite **affine** si elle peut se mettre sous la forme $f(x) = p \times x + q$

Exemples

Fonction	Linéaire ?	Affine ?
$f(x) = 3x$	Oui	Oui car $3x = 3x + 0$
$g(x) = -6x$	Oui	Oui car $-6x = -6x + 0$
$h(x) = 5x + 3$	Non	Oui
$i(x) = 7$	Non	Oui car $7 = 0x + 7$
$j(x) = \cos(x)$	Non	Non
$k(x) = x^2$	Non	Non

Propriété admise

Une situation de proportionnalité de coefficient p

- a une représentation graphique qui est une droite qui passe par l'origine du repère,
- correspond à la fonction linéaire $f(x) = p \cdot x$.

Soit $f(x) = p \cdot x + q$ une fonction affine.

Sa représentation graphique est une droite.

Exemple

Gabriel souhaite acheter des fraises pour faire de la confiture. Sur le marché, il a trouvé des fraises de France à 2,5€ le kilogramme.

Le prix des fraises est proportionnel à la masse de fraises.

Le coefficient de proportionnalité est 2,5.

On appelle x la masse de fraises en kilogrammes.

Cela correspond à la fonction linéaire $f(x) = 2,5 \cdot x$.

Marine est plus courageuse. Elle a trouvé un producteur qui lui offre de ramasser ses fraises pour 1,5€ le kilogramme après paiement d'une redevance forfaitaire de 20€.

Le prix des fraises chez ce producteur est donné par la fonction affine $g(x) = 1,5 \cdot x + 20$.

Comment tracer la représentation graphique d'une fonction linéaire ou affine ?

Comme leurs représentations graphiques sont des droites, il suffit de placer 2 points.

Afin de vérifier, il est intéressant d'en placer 3.

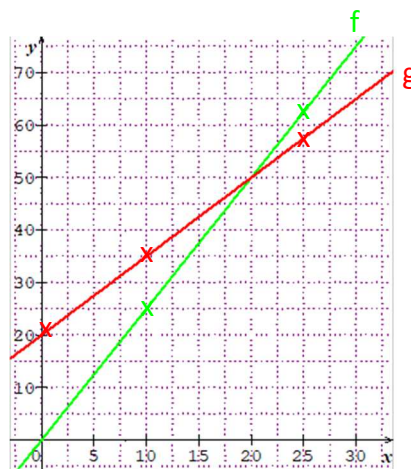
On construit donc un tableau de valeur avec 3 points.

Exemple des fraises

$$f(x) = 2,5 \cdot x$$

$$g(x) = 1,5 \cdot x + 20$$

x	0	10	25
$f(x)$	0	25	62,5
$g(x)$	20	35	57,5



Comment déterminer les antécédents d'un nombre par une fonction affine ?

On cherche les antécédents de a par la fonction affine $f(x) = p \cdot x + q$

Il suffit de résoudre l'équation $p \cdot x + q = a$

Exemple des fraises

On cherche combien Marine peut acheter de fraises avec 38€.

On cherche les antécédents de 38 donc les nombres x tels que $g(x) = 38$ donc $1,5x + 20 = 38$

$$1,5x + 20 = 38$$

$$1,5x = 18$$

$$x = 12$$

L'antécédent de 38 est 12.

On interprète ce résultats en disant que Marie peut donc acheter 12kg de fraises.

Propriété

Soit $f(x) = px + q$ une fonction affine.

La représentation graphique de f passe par le point de coordonnées $(0 ; q)$.

Le nombre q est appelé *ordonnée à l'origine*.

Si x augmente de 1 alors $f(x)$ augmente de p .

Le nombre p est appelé *coefficient directeur*

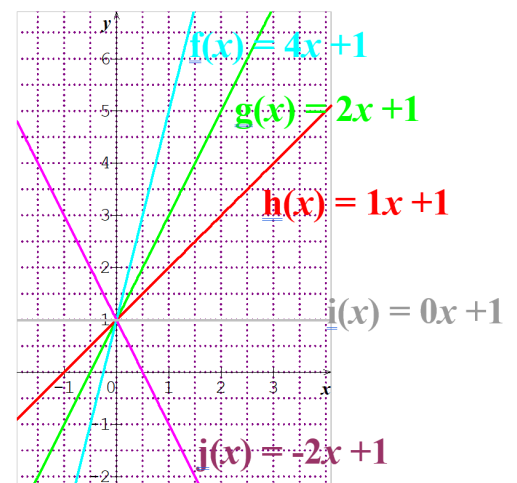
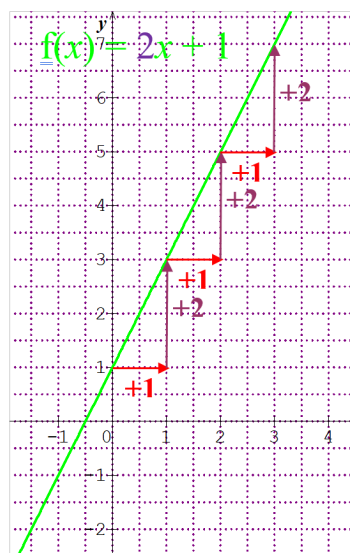
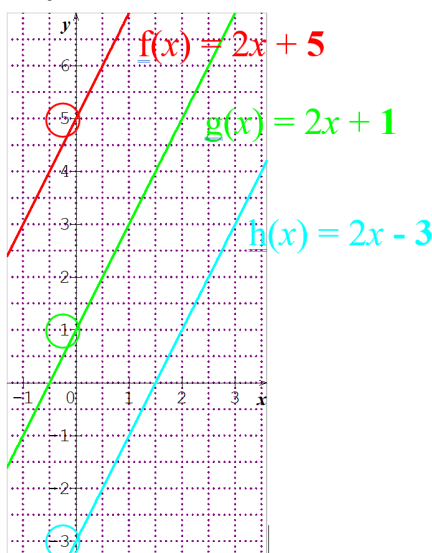
Démonstration

Si $x = 0$ alors $f(x) = f(0) = p \times 0 + q = q$, donc si $x = 0$ alors la représentation graphique de f passe par le point de coordonnées $(0 ; q)$.

$$f(x + 1) = p(x + 1) + q = px + p + q = px + q + p = f(x) + p$$

Donc si x augmente de 1 alors $f(x)$ augmente de p .

Exemples



Remarque

Deux fonctions qui ont le même coefficient directeur ont des représentations graphiques qui sont parallèles.

Propriété

Soit $f(x) = px + q$ une fonction affine.

Soit x_1 et x_2 deux nombres et $f(x_1)$ et $f(x_2)$ leurs images.

$$p = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Démonstration

$$f(x_1) = px_1 + q \quad f(x_2) = px_2 + q$$

$$f(x_2) - f(x_1) = px_2 + q - (px_1 + q)$$

$$f(x_2) - f(x_1) = px_2 + q - px_1 - q$$

$$f(x_2) - f(x_1) = px_2 - px_1$$

$$f(x_2) - f(x_1) = p(x_2 - x_1)$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = p$$

Exemple 1

Soit $f(x) = p x + q$ une fonction affine tel que $f(2) = 5$ et $f(6) = 21$ leurs images.

Trouver l'expression algébrique de f .

Comme f est une fonction affine, on peut utiliser la formule $p = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ avec $x_1 = 2$, $f(x_1) = 5$, $x_2 = 6$ et $f(x_2) = 21$.

$$\text{On a } p = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{21 - 5}{6 - 2} = \frac{16}{4} = 4$$

$$\text{Donc } f(x) = 4x + q.$$

Dans l'énoncé On remplace x par 2 dans la formule $f(x) = 4x + q$

↓ ↓

$$\text{On a } f(2) = 5 \text{ et } f(2) = 4 \times 2 + q$$

$$\text{donc } 5 = 4 \times 2 + q$$

$$\text{donc } 5 = 8 + q$$

$$\text{donc } -3 = q$$

$$\text{donc } f(x) = 4x - 3$$

Exemple 2

Soit A(4 ; 7) et B(6 ; 11) deux points.

Trouver l'expression algébrique de la fonction affine f dont la représentation graphique passe par les points A et B.

Soit C(5 ; 9) et D (8 ; 17)

Les points C et D appartiennent-ils à la droite (AB) ?

Soit $f(x) = px + q$ la fonction affine dont la représentation graphique passe par les points A et B.

$$\text{On a } f(4) = 7 \text{ et } f(6) = 11$$

$$\text{On a } x_1 = 4 \text{ et } f(x_1) = 7 \text{ et } x_2 = 6 \text{ et } f(x_2) = 11$$

Comme f est une fonction affine, on peut utiliser la formule $p = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

$$\text{Donc } p = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} = \frac{11 - 7}{6 - 4} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{Donc } f(x) = 2x + q.$$

$$\text{On a } f(4) = 7 \text{ et } f(4) = 2 \times 4 + q$$

$$\text{donc } 7 = 2 \times 4 + q$$

$$\text{donc } 7 = 8 + q$$

$$\text{donc } -1 = q$$

$$\text{donc } f(x) = 2x - 1$$

$$f(5) = 2 \times 5 - 1 = 9 \text{ donc } C \in (AB).$$

$$f(8) = 2 \times 8 - 1 = 15 \neq 17 \text{ donc } D \notin (AB).$$

Soit M (x ; y) un point sur cette droite.

Les coordonnées de ce point vérifient l'équation $y = 2x - 1$; on dit que $y = 2x - 1$ est l'équation de la droite (AB).

Pourcentages

Rappel

Prendre une fraction d'une quantité, c'est multiplier la fraction par cette quantité.

Le mot français « de » se traduit en mathématiques par une multiplication.

Exemple

Prendre $\frac{3}{5}$ de 120€, c'est prendre $\frac{3}{5} \times 120 = 72$ €.

Prendre 12% de 45€, c'est prendre $\frac{12}{100}$ de 45€, ce qui revient à prendre $\frac{12}{100} \times 45 = 5,40$ €.

Comment calculer le produit d'une fraction par une quantité ?

$$\frac{a}{b} \times c = (a \div b) \times c$$

$$\frac{a}{b} \times c = (a \times c) \div b$$

$$\frac{a}{b} \times c = (c \div b) \times a$$

Exemples

$$\begin{aligned} \frac{10}{5} \times 7 &= (10 \div 5) \times 7 \\ &= 2 \times 7 = 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{5}{3} \times 6 &= (5 \times 6) \div 3 \\ &= 30 \div 3 = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{7}{5} \times 15 &= (15 \div 5) \times 7 \\ &= 3 \times 7 = 21 \end{aligned}$$

Propriété

Ajouter $p\%$ à une quantité revient à la multiplier par $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

Soustraire $p\%$ à une quantité revient à la multiplier par $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$.

Démonstration

Soit Q la quantité.

$p\%$ de Q c'est $\frac{p}{100} \times Q$

Si on ajoute $p\%$ à Q , on trouve $Q + \frac{p}{100} \times Q = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \times Q$.

Si on soustrait $p\%$ à Q on trouve $Q - \frac{p}{100} \times Q = \left(1 - \frac{p}{100}\right) \times Q$.

Exemple 1

Paule va en courses. Ce sont les soldes et les prix sont soldés à -15% .

Quel sera le prix soldé d'un gilet dont le prix normal est 74€ ?

Calculons le prix soldé.

$$74 \times \left(1 - \frac{15}{100}\right) = 74 \times 0,85 = 62,90$$

Le prix soldé est $62,90\text{€}$.

Exemple 2

Le taux de TVA est de $33,3\%$.

a. Le prix HT est de 126€ . Quel est le prix TTC ?

b. Le prix TTC est de 150€ . Quel est le prix HT ?

Pour passer du prix HT au prix TTC, on multiplie par $1 + \frac{33,3}{100} = 1,333$ donc pour passer du prix TTC au prix HT, on divise par $1,333$

a. Calculons le prix TTC.

$$126 \times 1,333 \approx 167,96$$

Le prix TTC est d'environ $167,96\text{€}$.

b. Calculons le prix HT.

$$150 \div 1,333 \approx 112,53$$

Le prix HT est d'environ $112,53\text{€}$.

PARCOURS
DIFFÉRENCIÉS



<https://www.lesmathsdherve.net/statistiques-parcours/>



<https://www.lesmathsdherve.net/statistiques-videos-2/>



<https://www.lesmathsdherve.net/statistiques-aide/>