


# Arithmétique

Parcours vert	Parcours bleu	Parcours rouge	Parcours noir								
<p><b>a.</b> Donne tous les diviseurs de : 12 ; 18 ; 60 ; 45 ; 120 ; 180 ; 200</p> <p><b>b.</b> En utilisant l'algorithme d'Euclide, calcule le PGCD de : 120 et 250      540 et 315 45678 et 123    1200 et 45 145 et 45        2530 et 2622</p> <p><b>c.</b> Voici les diviseurs de trois nombres :</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 15%;">Nombre</th> <th>Liste des diviseurs</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>42</td> <td>1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7 ; 14 ; 21 ; 42</td> </tr> <tr> <td>56</td> <td>1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 8 ; 14 ; 28 ; 56</td> </tr> <tr> <td>60</td> <td>1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 ; 60</td> </tr> </tbody> </table> <p>Aide-toi de cette liste pour simplifier au maximum les fractions : <math>\frac{42}{56}</math>, <math>\frac{60}{56}</math> et <math>\frac{42}{60}</math>.</p> <p><b>d.</b> Décompose 132 et 390 en produits de facteurs premiers. Simplifie la fraction <math>\frac{132}{390}</math>. A l'aide des décompositions trouvées plus haut, cherche un multiple commun le plus simple possible, puis effectue <math>\frac{1}{132} + \frac{1}{390}</math>.</p> <p><b>e.</b> Trouve tous les nombres premiers jusqu'à 1000.</p> <p><b>f.</b> Donne tous les diviseurs communs de : 65 et 2730      432 et 1712 4050 et 4550    1476 et 1636 624 et 246      180 et 390</p> <p><b>g.</b> On pose : <math display="block">M = \frac{20755}{9488} - \frac{3}{8}</math></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Calcule le plus grand diviseur commun <math>D</math> de 20 755 et 9 488.</li> <li>Écris, en détaillant les calculs, le nombre <math>M</math> sous la forme d'une fraction irréductible.</li> </ol>	Nombre	Liste des diviseurs	42	1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7 ; 14 ; 21 ; 42	56	1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 8 ; 14 ; 28 ; 56	60	1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 ; 60	<p><b>a.</b> Un chocolatier vient de fabriquer 2622 œufs de Pâques et 2530 poissons en chocolat. Il souhaite faire des assortiments d'œufs et de poissons de façon que :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>tous les paquets aient la même composition ;</li> <li>après mise en paquet, il ne reste ni œuf ni poissons ;</li> <li>les paquets soient les plus petits possibles.</li> </ul> <p>Aide ce chocolatier à choisir la composition de chaque paquet.</p> <p><b>b.</b> Un collectionneur possède 1631 timbres français et 932 timbres étrangers. Il souhaite vendre toute sa collection en réalisant des lots identiques, c'est-à-dire comportant le même nombre de timbres et la même répartition de timbres français et étrangers. Calcule le nombre maximum de lots qu'il pourra réaliser et indique la composition de chaque lot.</p> <p><b>c.</b> Un collectionneur possède 1631 timbres français et 932 timbres étrangers. Il souhaite vendre toute sa collection en réalisant des paquets les plus gros possibles comportant le même nombre de timbres : soit français, soit étrangers. Calcule le nombre de lots qu'il pourra réaliser au minimum et indique la composition de chaque lot.</p> <p><b>d.</b> Pierre a gagné 84 sucettes et 147 bonbons à un jeu. Etant très généreux, et ayant surtout très peur du dentiste, il décide de les partager avec des amis. Pour ne pas faire de jaloux, chacun doit avoir le même nombre de sucettes et le même nombre de bonbons. Combien de personnes au maximum pourront bénéficier de ces friandises (Pierre étant inclus dans ces personnes) ? Combien de sucettes et de bonbons aura alors chaque personne ?</p> <p><b>e.</b> Pour le 1er Mai, Julie dispose de 182 brins de muguet et 78 roses. Elle veut faire le plus grand nombre de bouquets identiques en utilisant toutes ses fleurs. Combien de bouquets identiques pourra-t-elle faire au maximum ? Quelle sera la composition de chaque bouquet ?</p>	<p><b>a.</b> Dans une salle de bains, on veut recouvrir le mur situé au-dessus de la baignoire avec un nombre entier de carreaux de faïence de forme carrée dont le côté est un nombre entier de centimètres le plus grand possible. Détermine la longueur, en cm, du côté d'un carreau, sachant que le mur mesure 210 cm de hauteur et 135 cm de largeur. Combien faudra-t-il alors de carreaux ?</p> <p><b>b.</b> 6510 fourmis noires et 4650 fourmis rouges décident de s'allier pour combattre les termites. Pour cela, la reine des fourmis souhaite constituer, en utilisant toutes les fourmis, des équipes qui seront toutes composées de la même façon : un nombre de fourmis rouges et un autre nombre de fourmis noires. Quel est le nombre maximal d'équipes que la reine peut ainsi former ?</p> <p><b>c.</b> Un photographe doit réaliser une exposition en présentant ses œuvres sur des panneaux contenant chacun le même nombre de photos de paysages et le même nombre de portraits. Il dispose de 224 photos de paysage et de 288 portraits. Combien peut-il réaliser de panneaux en utilisant toutes les photos ?</p> <p><b>d.</b> 1. Décompose les nombres 162 et 108 en produits de facteurs premiers. 2. Détermine deux diviseurs communs aux nombres 162 et 108 plus grands que 10. 3. Un snack vend des barquettes composées de nems et de samossas. Le cuisinier a préparé 162 nems et 108 samossas. Dans chaque barquette : — le nombre de nems doit être le même. — le nombre de samossas doit être le même, Tous les nems et tous les samossas doivent être utilisés.</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>Le cuisinier peut-il réaliser 36 barquettes ?</li> <li>Quel nombre maximal de barquettes pourra-t-il réaliser ?</li> <li>Dans ce cas, combien y aura-t-il de nems et de samossas dans chaque barquette ?</li> </ol>	<p><b>a.</b> Un chocolatier vient de fabriquer 2622 œufs de Pâques et 2530 poissons en chocolat. Il souhaite faire des assortiments d'œufs et de poissons de façon que :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>tous les paquets aient la même composition ;</li> <li>après mise en paquet, il ne reste ni œuf ni poissons.</li> </ul> <p>Aide ce chocolatier à choisir la composition de chaque paquet ; donne toutes les possibilités.</p> <p><b>b.</b> Deux livres ont respectivement 480 et 608 pages. Chacun de ces livres est formé de fascicules, ou "cahiers" qui ont tous un même nombre de pages, compris entre 30 et 50.</p>  <p>Quel est le nombre de pages d'un cahier ? Quel est le nombre de cahiers qui composent chacun des livres ?</p> <p><b>c.</b> On veut paver une cour rectangulaire avec des dalles carrées dont les côtés mesurent un nombre entier de centimètres, supérieur à 5 et inférieur à 20. On veut poser uniquement des dalles entières. Est-ce possible pour une cour de : 1. 5,45 m sur 4,29 m ? 2. 7,28 m sur 9,75 m ?</p> <p><b>d.</b> En divisant 29687 et 35312 par un nombre entier <math>a</math> supérieur à 100, on trouve comme restes respectifs 47 et 32. Quel est le nombre <math>a</math> et quels sont les quotients de ces deux divisions ?</p> <p><b>e.</b> Quel est le nombre de diviseurs communs à 840 et 1080 ?</p> <p><b>f.</b> Abdel dit : « J'ai plus de 400 DVD mais moins de 450 ! Que je les groupe par 2, par 3, par 4 ou par 5, c'est toujours la même chose : il en reste un tout seul ! ». Combien Abdel a-t-il de DVD ?</p> <p><b>g.</b> A l'arrêt Blatin de Clermont-Ferrand, les premiers bus des lignes 3, 6 et 10 passent à 5h30 du matin. Les bus de la ligne 3 passent toutes les 6min, ceux de la ligne 6 toutes les 15min et la ligne 10 toutes les 18min. A quelle heure pourra-t-on voir à nouveau un bus des 3 lignes ensemble à cet arrêt ?</p> <p><b>h.</b> Amélie sort de son appartement pour aller au collège et décide de prendre l'escalier. Elle a descendu 238 marches quand elle arrive sur un palier et qu'elle s'aperçoit qu'elle a oublié son livre de maths. Elle remonte 182 marches et comme elle se trouve sur un palier, elle décide de prendre l'ascenseur pour remonter chez elle. Sachant qu'il y a toujours le même nombre de marches entre deux étages, à quel étage au minimum habite Amélie</p>
Nombre	Liste des diviseurs										
42	1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7 ; 14 ; 21 ; 42										
56	1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 8 ; 14 ; 28 ; 56										
60	1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 ; 60										

a. 12 : 1, 2, 3, 4, 6, 12    18 : 1, 2, 3, 6, 9, 18  
 60 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60  
 120 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120  
 180 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180  
 200 : 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 200

b. PGCD(120 ; 250)= 10    PGCD(540 ; 315)= 45  
 PGCD(45678 ; 123)= 3    PGCD(1200 ; 45)= 15  
 PGCD(145 ; 45)= 5    PGCD(2530 ; 2622)= 46

c.  $\frac{42}{56} = \frac{3}{4} = \frac{60}{14}$  et  $\frac{42}{60} = \frac{7}{10}$

d.  $132=2^2 \times 3 \times 11$      $390=2 \times 3 \times 5 \times 13$   
 $\frac{132}{390} = \frac{22}{65} = \frac{1}{132} + \frac{1}{390} = \frac{29}{2860}$

e. 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97 ; 101 ; 103 ; 107 ; 109 ; 113 ; 127 ; 131 ; 137 ; 139 ; 149 ; 151 ; 157 ; 163 ; 167 ; 173 ; 179 ; 181 ; 191 ; 193 ; 197 ; 199 ; 211 ; 223 ; 227 ; 229 ; 233 ; 239 ; 241 ; 251 ; 257 ; 263 ; 269 ; 271 ; 277 ; 281 ; 283 ; 293 ; 307 ; 311 ; 313 ; 317 ; 331 ; 337 ; 347 ; 349 ; 353 ; 359 ; 367 ; 373 ; 379 ; 383 ; 389 ; 397 ; 401 ; 409 ; 419 ; 421 ; 431 ; 433 ; 439 ; 443 ; 449 ; 457 ; 461 ; 463 ; 467 ; 479 ; 487 ; 491 ; 499 ; 503 ; 509 ; 521 ; 523 ; 541 ; 547 ; 557 ; 563 ; 569 ; 571 ; 577 ; 587 ; 593 ; 599 ; 601 ; 607 ; 613 ; 617 ; 619 ; 631 ; 641 ; 643 ; 647 ; 653 ; 659 ; 661 ; 673 ; 677 ; 683 ; 691 ; 701 ; 709 ; 719 ; 727 ; 733 ; 739 ; 743 ; 751 ; 757 ; 761 ; 769 ; 773 ; 787 ; 797 ; 809 ; 811 ; 821 ; 823 ; 827 ; 829 ; 839 ; 853 ; 857 ; 859 ; 863 ; 877 ; 881 ; 883 ; 887 ; 907 ; 911 ; 919 ; 929 ; 937 ; 941 ; 947 ; 953 ; 967 ; 971 ; 977 ; 983 ; 991 et 997.

f. 1, 5, 13, 65    1, 2, 4, 8, 16    1, 2, 5, 10, 25, 50  
 1, 2, 4    1, 2, 3, 6    1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

g.  $D = 593$      $M = \frac{29}{16}$

a. 46 paquets de 57 œufs et 55 poissons

b. 233 lots de 7 timbres français et 4 timbres étrangers

c. 7 lots de 233 timbres français et 4 lots de 233 timbres étrangers

d. 21 personnes avec 4 sucettes et 7 bonbons

e. 26 bouquets de 7 brins de muguet et 3 roses

a. 15 cm de côté et 126 carreaux

b. 930 équipes de 7 fourmis noires et 5 fourmis rouges

c. 1, 2, 4, 8, 16 ou 32 panneaux.

d.  $162=2 \times 3^4$      $108=2^2 \times 3^3$   
 Les diviseurs communs sont 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54  
 Il ne peut pas réaliser 36 barquettes car 162 ne se divise pas par 36  
 54 barquettes de 3 nems et 2 samossas

a.

Nombres de paquets	1	2	23	46
Nombres d'œufs	2622	1311	114	57
Nombre de poissons	2530	1265	110	55

b. 32 pages par cahier ; 15 et 19 cahiers

c. Des carreaux de 1 cm sont trop petits  
 Des carreaux de 13 cm

d.  $a = 120$  et les quotients sont 247 et 294

e. Il y en a 16 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60 et 120

f. 421 DVD

g. On cherche un nombre qui soit multiple de 6, 15 et 18.  
 On aura à nouveau les 3 bus après 90 minutes, soit 1h30, soit à 7h.

h. Comme après 238 et 182 marches elle se trouve sur un palier, alors le nombre de marches entre deux étages est un diviseur commun à 238 et 182.  
 Comme on cherche à quel étage elle habite au minimum, on cherche le maximum de marches entre deux étages dont le nombre de marches entre deux étages est le PGCD de 238 et 182.  
 ...  
 Donc PGCD(224 ; 288) = 14 donc il y a au maximum 14 marches entre deux étages ; elle est au minimum au  $238 \div 14 = 17^{\text{ème}}$  étage.

### Parcours hors-piste

a. Recopie et complète la grille avec les nombres que tu découvriras grâce aux définitions.

**Horizontalement**

I : PGCD (125 ; 250).

II : Ce nombre est un multiple de 9.

III : Le chiffre des unités d'un nombre divisible par 10. ■ Ce nombre est divisible par 5.

IV : Le reste de la division euclidienne de 121 par 8. ■ Le quotient dans celle de 245 par 112.

	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>
<b>I</b>				■
<b>II</b>				
<b>III</b>		■		
<b>IV</b>	■		■	

**Verticalement**

A : Le plus petit multiple de 24 à trois chiffres.

B : Le quotient de la division euclidienne de 274 par 10. ■ Diviseur commun à tous les entiers.

C : PGCD (1 542 ; 3 598).

D : 3 est un diviseur de ce nombre.

b. Démontre que si a est impair alors  $a^2$  est impair.  
 Déduis-en que si  $a^2$  est pair alors a est pair.

c. n est un entier naturel.  
 Démontre que si n est impair alors 8 divise  $n^2 - 1$ .  
 Le nombre  $1 + 3^n$  est-il toujours pair ?  
 Démontre que  $2^n + 2^{n+1}$  est divisible par 3.

d. La grand-mère de Nicolas a fait 26 crêpes. Elle demande à Nicolas de les distribuer à parts égales à chacun de ses quatre cousins présents dans la cuisine. Lorsqu'il ne pourra plus en distribuer, il gardera le reste pour lui. Après réflexion, Nicolas s'empresse d'aller chercher ses trois autres cousins dans le jardin. Pourquoi ?

e. Un groupe de moins de 40 personnes doit se répartir équitablement une somme de 229 €. Il reste alors 19 €. Une autre fois, ce même groupe doit se répartir équitablement 474 € : cette fois-ci, il reste 12 €.

- Combien y a-t-il de personnes dans ce groupe ?
- Ils décident de se répartir ce qu'il reste équitablement.  
 Combien chaque personne reçoit-elle en plus ?  
 Quelle somme auront-ils reçue au total ?

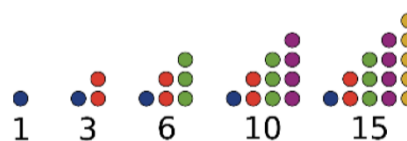
f. Un terrain rectangulaire a pour dimensions 966 m et 1 008 m. Sur ses côtés, on veut planter des arbres régulièrement espacés d'un nombre entier de mètres. Il doit y avoir un arbre à chaque coin du terrain.  
 Quel est le nombre minimum d'arbres que l'on pourra planter ?

g. Une piscine rectangulaire mesure 3,36 m par 7,80 m et a une profondeur de 1,44 m. On désire la carreler avec des carreaux carrés tous identiques. Le carreleur ne veut pas faire de découpes de carreaux et préfère les grands carreaux, car ils sont plus faciles à poser. Son fournisseur a toutes les tailles de carreaux en nombre entier de centimètres.

- Quelle taille de carreaux doit-il commander ?
- Son fournisseur vend les carreaux par lot de 100. Combien de lots doit-il commander ?

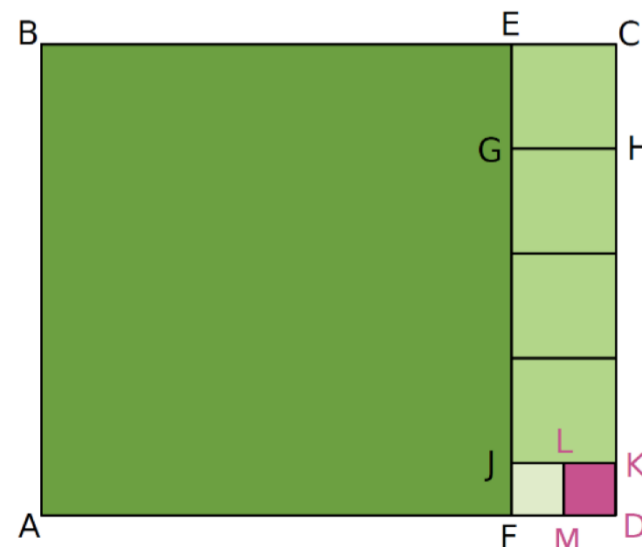
h. Ci-contre, les cinq premiers nombres « triangulaires ».

- Quel est le millième ?
- Quelle conjecture peux-tu faire lorsque tu additionnes deux nombres triangulaires consécutifs ?  
 Démontre-la !



i. Dans cette partie, nous allons illustrer le calcul du PGCD de 18 et 22 par une figure géométrique. On commence par construire un rectangle ABCD tel que AB = 18 et BC = 22. On construit ensuite le carré ABEF. Dans la surface restante, le rectangle ECDF, on peut placer quatre carrés de côté EC. On construit ensuite le carré JLMF et on constate que la surface restante est l'intérieur d'un carré : **LKDM**.

- Chaque membre du groupe reproduit cette figure en choisissant comme unité un carreau ou 1 cm.
- Chaque membre calcule, par la méthode des soustractions successives, le PGCD de 18 et 22.
- Quels nombres, apparaissant dans la méthode des soustractions successives, correspondent à des longueurs sur la figure ?
- À quelle longueur correspond le PGCD de 18 et 22 ?



De la même manière, détermine le PGCD de 12 et 45 par la méthode géométrique (sur une feuille à petits carreaux).