FRACTIONS : multiplications et divisions

Propriété du signe des fractions

Une fraction est une division, donc la règle des signes s'applique pour déterminer le signe d'une fraction (on compte le nombre de termes négatifs).

Exemples

$$\frac{-3}{4} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4} = -\frac{-3}{-4} = -0{,}75$$

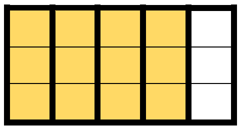
Il y a 1 (ou 3) terme(s) négatif(s), donc le résultat est négatif.

$$\frac{-3}{-4} = \frac{3}{4} = +0{,}75$$

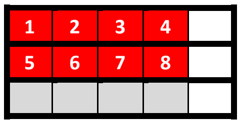
Il y a 2 termes négatifs, donc le résultat est positif.

Remarque

Quatre cinquièmes valent



Deux tiers de quatre cinquièmes valent huit quinzièmes



Deux tiers de quatre cinquièmes s'écrit $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ et on voit que $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$

Propriété de multiplication de fractions - admise

Pour multiplier deux fractions, il suffit de multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Astuce

Pour déterminer le signe, on utilise la règle des signes.

Exemples

$$\frac{5}{7} \times \frac{9}{11} = \frac{5 \times 9}{7 \times 11} = \frac{45}{77}$$

$$\frac{-5}{3} \times \frac{-8}{-4} = -\frac{5 \times 8}{3 \times 4} = -\frac{40}{12} = -\frac{10}{3}$$

Il y a 3 termes négatifs, donc le résultat est négatif.

$2 \times \frac{3}{5} \neq \frac{2 \times 3}{2 \times 5} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ mais $2 \times \frac{3}{5} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{5} = \frac{2 \times 3}{1 \times 5} = \frac{6}{5}$

Définition

L'inverse d'un nombre a non nul est le nombre qui multiplié par a vaut 1. L'inverse de a est noté : a^{-1}.

Exemples

- L'inverse de 2 est 0,5 car 2 × 0,5 = 1
- L'inverse de 4 est 0,25 car 4 × 0,25 = 1
- L'inverse de 0,8 est 1,25 car 0,8×1,25 = 1

Propriété

L'inverse du nombre *a* vaut $\frac{1}{a}$.

L'inverse de la fraction $\frac{a}{b}$ vaut $\frac{b}{a}$.

Démonstrations

$$a \times \frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = 1$$

Exemples

Nombre	5	-3	$\frac{2}{7}$	$\frac{-3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	0
Inverse	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{4}$	N'existe pas

Ne pas confondre inverse et opposé.
L’opposé de 2 est -2
L’inverse de 2 est $\frac{1}{2}$

Définition

Diviser c'est multiplier par l'inverse.

Exemples

$$\frac{3}{4} \div \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{21}{20}$$

$$\frac{-2}{3} \div \frac{5}{7} = -\frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = -\frac{14}{15}$$

$$\frac{7}{3} \div 2 = \frac{7}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$$

$$8 \div \frac{5}{7} = 8 \times \frac{7}{5} = \frac{56}{5}$$

On inverse uniquement le nombre se trouvant après le symbole de division et on ne change pas celui qui est avant.

Application

Parcours bleu
Parcours rouge

Remarques

$\frac{3}{5}$ est une notation de 3 ÷ 5 et vaut 0,6

Il n'est pas possible de donner une valeur décimale exacte pour toutes les fractions, par exemple : $\frac{1}{3} \approx 0{,}33$

$$\frac{2}{\frac{3}{4}} = 2 \div \frac{3}{4} = 2 \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{4} = \frac{2}{3} \div 4 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12} \approx 0{,}17$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Attention à la position du signe d'égalité lorsqu'il y a des fractions à "étages".

Exemple de calcul « complexe »

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) \div \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) \div \left(\frac{2}{4} - \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4} \div \frac{-1}{4} = \frac{5}{4} \times \frac{4}{-1} = \frac{20}{-4} = -5$$

I – Théorème de Thalès

Rappel admise

Pour passer du nombre a au nombre b, on multiplie par $\frac{b}{a}$.

$$a \xrightarrow{\times \frac{b}{a}} b \qquad départ \xrightarrow{\times \frac{arrivée}{départ}} arrivée$$

Exemples

$$5 \xrightarrow{\times 3} 15 \qquad 5 \xrightarrow{\times 13} 65 \qquad 5 \xrightarrow{\times \frac{645}{5} \text{ ou } \times 129} 645 \qquad 5 \xrightarrow{\times \frac{7}{5}} 7 \qquad 7 \xrightarrow{\times \frac{3}{7}} 3$$

Comment identifier que deux triangles sont homothétiques l'un de l'autre ?

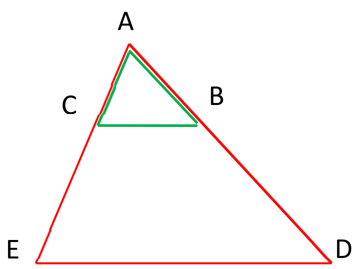
Soit ABC un triangle.

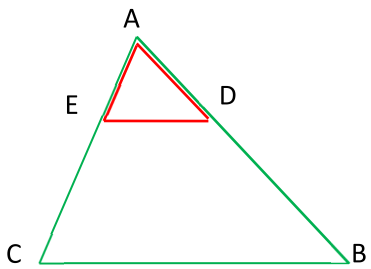
Si D∈(AB) et E∈(AC) et (BC)//(DE) alors ADE et ABC sont homothétiques l'un par rapport à l'autre.

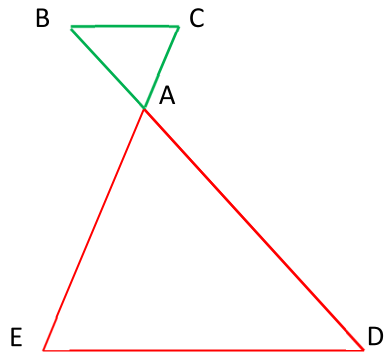
Théorème de Thalès

Soit ABC un triangle.

Si D∈(AB) et E∈(AC) tels que (BC)//(DE) alors $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$ $\quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$







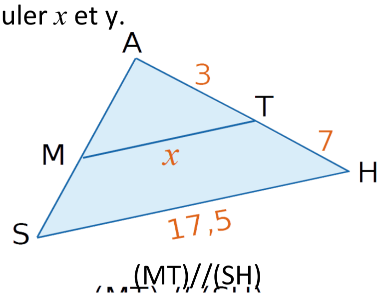
"Démonstration"

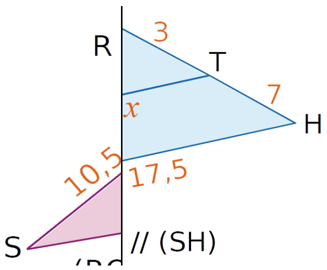
Les trois quotients intervenant dans le théorème sont les coefficients d'agrandissement/réduction permettant de passer de ABC à ADE.

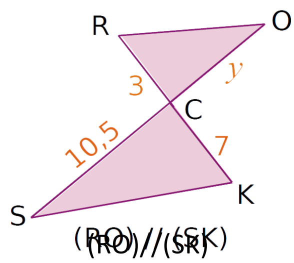
Exemples

Sur les figures ci-dessous, les distances sont en centimètres.

Calculer x et y.







Comme A, T, H et A, M, S sont alignés et comme (MT)//(HS), d'après le théorème de Thalès

$$\frac{AT}{AH} = \frac{AM}{AS} = \frac{MT}{SH}$$

$$\frac{3}{10} = \frac{AM}{AS} = \frac{x}{17{,}5}$$

$$x = \frac{3 \times 17{,}5}{10} = 5{,}25 \text{ cm}$$

Comme R, C, K et O, C, S sont alignés et comme (RO)//(KS), d'après le théorème de Thalès

$$\frac{CR}{CK} = \frac{CO}{CS} = \frac{RO}{SK}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{y}{10{,}5} = \frac{RO}{SK}$$

$$y = \frac{3 \times 10{,}5}{7} = 4{,}5 \text{ cm}$$

Propriété réciproque de Thalès - admise

Si A, B, D et A, C, E sont alignés dans cet ordre et si

$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$

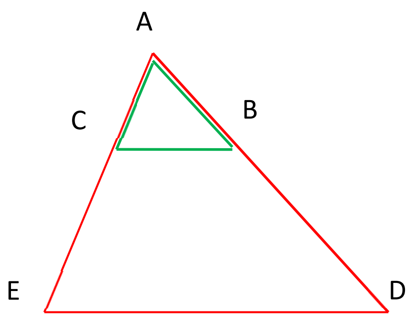
alors **(BC)//(DE)**

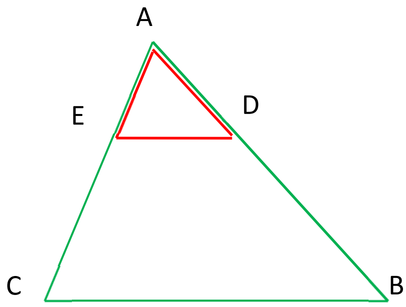
Propriété contraposée de Thalès - admise

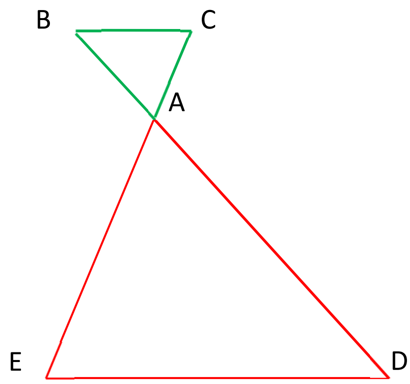
Si A, B, D et A, C, E sont alignés dans cet ordre et si

$\frac{AB}{AD}\neq\frac{AC}{AE}$

alors **(BC) et (DE) ne sont pas parallèles**

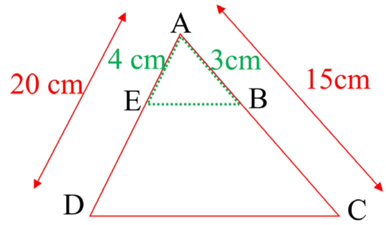


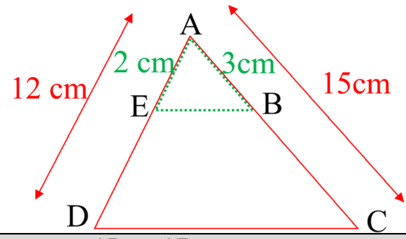




Exemples

On cherche à savoir si les droites (BE) et (CD) sont parallèles.





Si les droites (BE) et (CD) étaient parallèles, le théorème de Thalès donnerait $\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AD}$. On calcule séparément ces deux rapports

$\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{AC}}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{15}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$

$\frac{AE}{AD}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$

donc $\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AD}$ et comme A, B, C et A, E, D sont alignés dans le même ordre, d'après la propriété réciproque de Thalès alors (BE)//(CD).

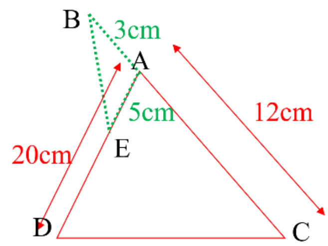
$\frac{AB}{AC}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

$\frac{AE}{AD}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

donc $\frac{AB}{AC}\neq\frac{AE}{AD}$ et comme A, B, C et A, E, D sont alignés dans le même ordre, d'après la contraposée de Thalès alors (BE) et (CD) ne sont pas parallèles.

Remarque

La condition d'alignement dans le même ordre est indispensable.



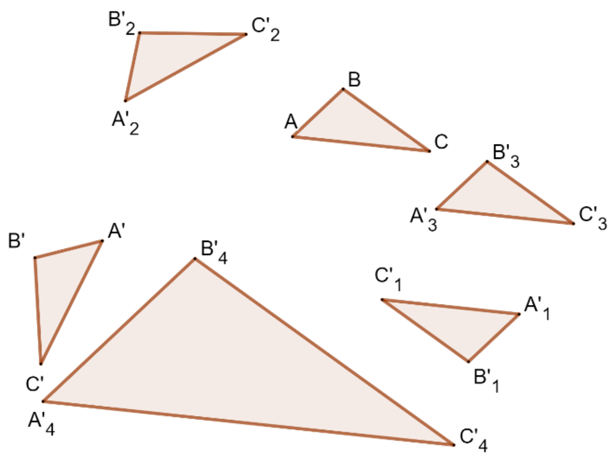
On a : $\frac{AB}{AC}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

On a aussi : $\frac{AE}{AD}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$

Donc $\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AD}$ et pourtant les droites (BE) et (CD) ne sont pas parallèles.

Soit B devrait appartenir à [AC], soit E devrait appartenir à [DA) sans appartenir à [DA].

II – Triangles semblables



Définition

Deux triangles sont *semblables* s'ils ont la même forme, mais pas nécessairement la même taille.

Propriété admise

Deux triangles sont semblables :

- si leurs côtés sont proportionnels

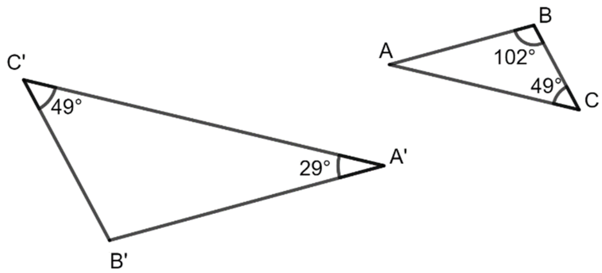
ou

- s'ils ont les mêmes angles.

Remarque

Pour passer entre deux triangles semblables, on peut effectuer une ou plusieurs transformations du plan vues au collège : symétrie axiale, symétrie centrale, translation, rotation ou homothétie.

Exemple 1 : avec des angles



Dans le triangle ABC, on a

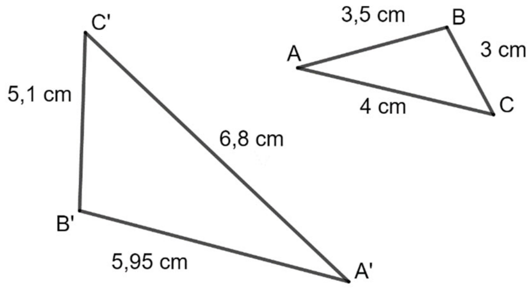
$\widehat{\mathbf{A}} = \mathbf{180} - \left(\widehat{\mathbf{B}} + \widehat{\mathbf{C}}\right) = \mathbf{180} - (\mathbf{102} + \mathbf{49}) = \mathbf{29}°$.

Dans le triangle A'B'C', on a

$\widehat{\mathbf{B}'} = \mathbf{180} - \left(\widehat{\mathbf{A}'} + \widehat{\mathbf{C}'}\right) = \mathbf{180} - (\mathbf{49} + \mathbf{29}) = \mathbf{102}°$.

On a donc $\widehat{\mathbf{ABC}} = \widehat{\mathbf{A'B'C'}}$ et $\widehat{\mathbf{ACB}} = \widehat{\mathbf{A'C'B'}}$ et $\widehat{\mathbf{BAC}} = \widehat{\mathbf{B'A'C'}}$ donc les triangles ABC et A'B'C' sont semblables.

Exemple 2 : avec des côtés proportionnels



$$\frac{\mathbf{A'B'}}{\mathbf{AB}} = \frac{\mathbf{5,95}}{\mathbf{3,5}} = \mathbf{1,7}$$

$$\frac{\mathbf{A'C'}}{\mathbf{AC}} = \frac{\mathbf{6,8}}{\mathbf{4}} = \mathbf{1,7}$$

$$\frac{\mathbf{C'B'}}{\mathbf{CB}} = \frac{\mathbf{5,1}}{\mathbf{3}} = \mathbf{1,7}$$

Donc $\dfrac{\mathbf{A'B'}}{\mathbf{AB}} = \dfrac{\mathbf{A'C'}}{\mathbf{AC}} = \dfrac{\mathbf{C'B'}}{\mathbf{CB}}$ donc les triangles ABC et A'B'C' sont semblables.

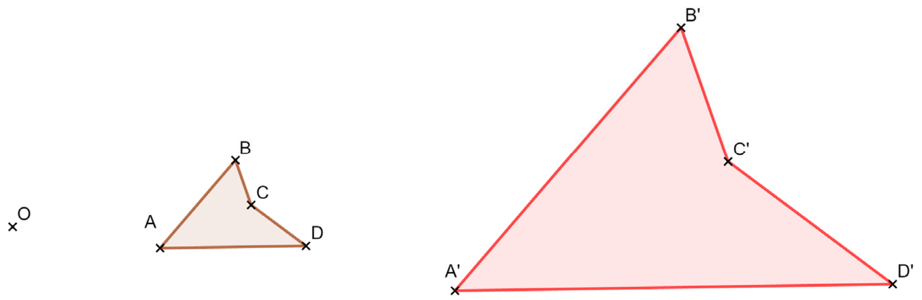
III – Homothéties : agrandissement/réduction

Définition

Le point A' est l'image du point A par l'*homothétie* de centre O et de coefficient k si :

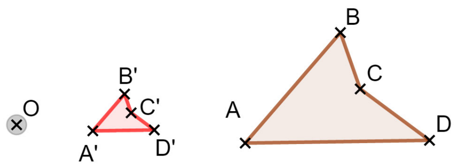
- A' ∈ (OA)
- OA' = k × OA

Si le coefficient est supérieur à 1, on parle d'*agrandissement*.



Le quadrilatère A'B'C'D' est agrandissement de ABCD de centre O et de coefficient 3.

Si le coefficient est entre 0 et 1, on parle de *réduction*.

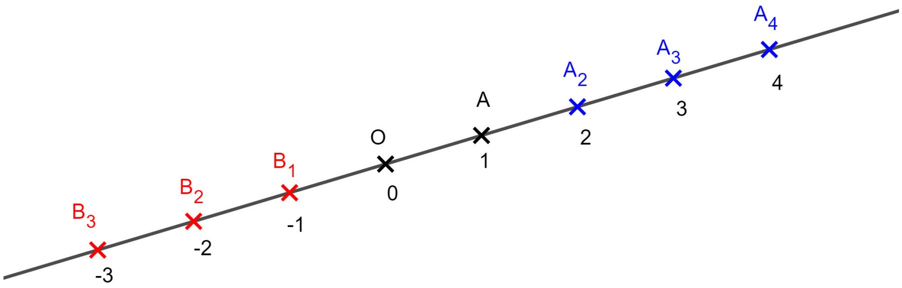


Le quadrilatère A'B'C'D' est la réduction de ABCD de centre O et de coefficient $\frac{1}{3}$.

Construction

Pour construire l'image du point A par l'homothétie de centre O et de rapport k, il faut :

- Si k>0, tracer [OA) puis mesurer [OA] et placer A' sur [OA) tel que OA' = k × OA
- Si k<0, tracer [AO) puis mesurer [OA] et placer A' sur [AO) tel que OA' = (*distance à zéro de* k) × OA



- A_2 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 2
- A_3 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 3
- A_4 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 4
- B_1 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -1
- B_2 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -2
- B_3 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -3

Remarque

Une homothétie de rapport -1 est une symétrie centrale

Propriété admise

L'homothétie conserve les angles, les formes mais pas les distances et les surfaces (cf. la propriété d'agrandissement réduction des solides, vue plus tard dans l'année).

Remarque

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

Pour construire la figure ci-contre, j'ai :

1. Tracer l'image A' de A
2. Tracer l'image B' de B
3. Construis le carré A'B'C'D'.
4. Tracer la diagonale [A'C']
5. Placer son milieu E'.
6. Tracer le segment [B'E'].
7. Placer le point M' au milieu de [A'B'].
8. Tracer le demi-cercle de diamètre [A'B'] à l'extérieur du carré.

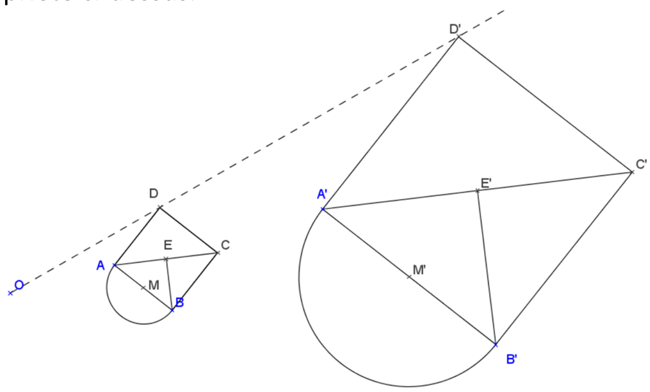


Image par l'homothétie de centre O et de rapport 3.

Caractériser

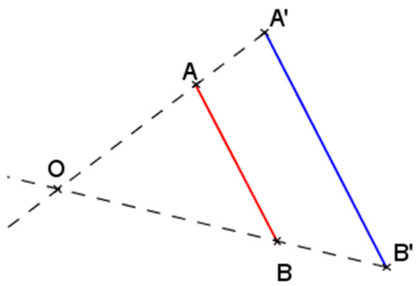
Pour caractériser une homothétie, il faut trouver son centre et son rapport.

Repérer 2 points A et B et leurs images A' et B' telles que ces points ne soient pas alignés.

Tracer les 2 demi-droites [A'A) et [B'B) ; elles se coupent en O qui est le centre.

Mesurer [OA] et [OA'].

Le rapport k vérifie : $k = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$.



PUISSANCES de 10 et NOTATION SCIENTIFIQUE

Définition

Le nombre noté a^n qui se lit « a exposant n » est le produit de n facteurs tous égaux à a.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\text{n facteurs}}$$

Exemples

$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ $\quad$ $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ $\quad$ $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

Remarques

a^2 se lit "a exposant 2" ou "a au carré"
a^3 se lit "a exposant 3" ou "a au cube"

Astuce

La règle des signes s'applique pour le calcul des puissances.

Le signe de a^n est positif si :

- a est positif
- ou a est négatif et n est pair (0, 2, 4, 6, 8, 10 …).

Le signe de a^n est négatif si : a est négatif et n est impair (1, 3, 5, 7, 9, 11 …).

Exemples

4^5 est positif
$(-4)^5$ est négatif car il y a **5** facteurs négatifs.
$(-10)^8$ est positif car il y a **8** facteurs négatifs.

Application

Parcours vert

Propriété de priorité opératoire - admise

Pour calculer une expression numérique, on procède selon l'ordre suivant :

1. On calcule l'intérieur des parenthèses. Si des parenthèses sont imbriquées (l'une dans l'autre), on commence par celles qui sont le plus à l'intérieur.
2. On calcule les puissances.
3. On effectue les multiplications et divisions.
4. On termine toujours par les additions et soustractions.

Exemple

$4 \times 5^2 \times (5 - 4 \times 3)$
$= 4 \times 5^2 \times (5 - 12)$
$= 4 \times 5^2 \times (-7)$
$= 4 \times 25 \times (-7)$
$= 100 \times (-7)$
$= -700$

Attention à la position du signe "-" dans le calcul des puissances

$(-2)^4 = 16$ car $(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = +16$

$-\,2^4 = -16$ car $-\,2^4 = -\,2 \times 2 \times 2 \times 2 = -16$

$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

La puissance est prioritaire sur le signe "-" qui correspond à une soustraction.
On calcule d'abord la puissance.

Propriété 1 - admise

$$x^a \times x^b = x^{a+b}$$

S'il y a le même nombre en bas, on additionne les puissances

Exemples

$2^3 \times 2^7 = 2^{3+7} = 2^{10}$ $\quad$ $3^4 \times 3^7 = 3^{4+7} = 3^{11}$ $\quad$ $(-2)^3 \times (-2)^7 = (-2)^{3+7} = (-2)^{10}$

"Justification"

$2^3 \times 2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{3+7} = 2^{10}$

⚠ Attention à la consigne car on peut attendre deux résultats différents.

Calcule	Mettre $2^3 \times 2^5$ sous la forme d'une seule puissance
$2^3 \times 2^5 = 8 \times 32$ $= 256$ *Le résultat est un nombre (entier ou décimal) ou une fraction*	$2^3 \times 2^5$ $= 2^8$ *Le résultat est **une** puissance*

Propriété 2 - admise

$(x^a)^b = x^{a \times b}$ Si les puissances sont imbriquées, on multiplie les exposants.

Exemples

$$(2^3)^4 = 2^{3\times 4} = 2^{12} \qquad (10^2)^4 = 10^{2\times 4} = 10^8$$

"Justification"

$$(2^3)^4 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{12}$$

Remarque

← ÷ 10 — — × 10 →	← ÷ 10 — — × 10 →	← ÷ 10 — — × 10 →	← ÷ 10 — — × 10 →	← ÷ 10 — — × 10 →	← ÷ 10 — — × 10 →	← ÷ 10 — — × 10 →	← ÷ 10 — — × 10 →	← ÷ 10 — — × 10 →
10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4
0,0001	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1 000	10 000
$\frac{1}{10000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$					
$\frac{1}{10^4}$	$\frac{1}{10^3}$	$\frac{1}{10^2}$	$\frac{1}{10^1}$					

$$10^{-4} = \frac{1}{10^4} \qquad 10^{-3} = \frac{1}{10^3} \qquad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} \qquad 10^{-1} = \frac{1}{10^1}$$

Propriété 3 - admise

Si $x \neq 0$ alors $x^0 = 1$

Exemples

$4^0 = 1$ $(-4)^0 = 1$ $\pi^0 = 1$ $2{,}7^0 = 1$ $(-4{,}8)^0 = 1$ $-9^0 = -1$

Propriété 4 - admise

$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ L'exposant négatif devient « 1 sur … »

Exemples

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \qquad 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} \qquad (-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = \frac{1}{-32} = -\frac{1}{32}$$

Propriété - admise

Soit n un entier positif.
10^n s'écrit avec un "1" suivi de n "0".
10^{-n} s'écrit "0,0…01" avec n "0" au total en comptant celui avant la virgule.

Exemples

$10^7 = 10000000$ (7 zéros) $10^{-8} = 0{,}00000001$ (8 zéros)

Définition

Un nombre est dit **sous la forme scientifique** (ou en **notation scientifique**) s'il s'écrit sous la forme : $a \times 10^n$

↙ ↘

a est un nombre décimal dont la distance à zéro est supérieure ou égale à 1 et strictement inférieure à 10 (il ne peut pas être égal à 10).

n est un entier relatif (positif ou négatif)

Exemples de nombres n'étant pas en notation scientifique

15	10^3	15×10^4	10×10^4	$0{,}8 \times 10^4$	$1{,}5 \times 10^{4{,}2}$
Il manque ×10…	Il manque un nombre devant	Le nombre devant est supérieur à 10.	Le nombre devant est égal à 10.	Le nombre devant n'est pas supérieur ou égal à 1.	L'exposant n'est pas entier

Exemples de nombres étant sous la forme scientifique

1×10^4 $1,5 \times 10^{-5}$ $-1,5 \times 10^{42}$ $-9,5 \times 10^{-12}$ $-1,7 \times 10^0$ $1,5 \times 10^0$

Rappels

Si n est positif, multiplier par 10^n c'est décaler la virgule de *n* rangs vers la droite.
Si n est positif, multiplier par 10^{-n} c'est décaler la virgule de *n* rangs vers la gauche.

Exemples de passage de la notation scientifique à la notation décimale.

$4,52 \times 10^4 = 45200$ $-6 \times 10^4 = -60000$ $4,52 \times 10^{-4} = 0,000452$

Exemples de passage de la notation décimale à la notation scientifique.

$123,45 = 1,2345 \times 10^2$ *$10^2 = 100$*

$0,012345 = 1,2345 \times 10^{-2}$ *$10^{-2} = 0,01$*

$123,45 \times 10^5 = 1,2345 \times 10^2 \times 10^5 = 1,2345 \times 10^7$

Remarque

Pour faire un calcul avec des nombres en notation scientifique (où apparaissent uniquement des quotients ou produits), on commence par regrouper les nombres décimaux et les puissances de 10.

Exemples

$12 \times 10^4 \times 55 \times 10^8 = 12 \times 55 \times 10^4 \times 10^8 = 660 \times 10^{12} = 6,6 \times 10^2 \times 10^{12} = 6,6 \times 10^{14}$

$25 \times 10^{-14} \times (-400) \times 10^8 = 25 \times (-400) \times 10^{-14} \times 10^8 = -10000 \times 10^{-6} = -1 \times 10^4 \times 10^{-6} = -1 \times 10^{-2}$

$0,0055 \times 10^7 \times 2 \times 10^8 = 0,0055 \times 2 \times 10^7 \times 10^8 = 0,011 \times 10^{15} = 1,1 \times 10^{-2} \times 10^{15} = 1,1 \times 10^{13}$

$$\frac{45 \times 10^{23} \times 24 \times 10^{-4}}{18 \times 10^5} = \frac{45 \times 24}{18} \times \frac{10^{23} \times 10^{-4}}{10^5} = \frac{1080}{18} \times \frac{10^{19}}{10^5} = 60 \times 10^{14} = 6 \times 10^1 \times 10^{14} = 6 \times 10^{15}$$

Utilisation de la calculatrice

Pour calculer avec des puissances on utilise la touche :

$\boxed{\blacksquare^{\blacksquare}}$ $\boxed{x^{\blacksquare}}$ $\boxed{x^y}$ $\boxed{x^n}$ $\boxed{y^x}$ $\boxed{\wedge}$ $\boxed{\uparrow}$

Dans la suite, on nommera $\boxed{x^{\blacksquare}}$ cette touche.

Pour calculer $5^3 \times 2 - (2-5)^4$ on tape 5 $\boxed{x^{\blacksquare}}$ 3 × 2 - (2 - 5) $\boxed{x^{\blacksquare}}$ 4 et on trouve 169.

Pour calculer avec des puissances on utilise la touche :

$\boxed{\times 10^{\blacksquare}}$ $\boxed{\times 10^x}$ $\boxed{\times 10^n}$ $\boxed{\text{EXP}}$ $\boxed{\text{EE}}$

Dans la suite, on nommera $\boxed{\times 10^{\blacksquare}}$ cette touche. Elle remplace l'appui sur les touches $\boxed{\times}$ 10 $\boxed{x^{\blacksquare}}$

Pour calculer $12 \times 10^4 \times 55 \times 10^8$ on tape 12 $\boxed{\times 10^{\blacksquare}}$ 4 × 55 $\boxed{\times 10^{\blacksquare}}$ 8 et on trouve $6,6 \times 10^{14}$.

STATISTIQUES

Exemple

Voici la liste des âges en mois d'élèves de troisième :

180	176	179	176	182	**178**	184	181	179	173	182
187	175	181	174	183	**178**	180	**178**	184	173	175
173	180	195	179	174	182	172	174	195	183	193
190	181	173	177	180	183	180	183	186	180	

Définitions

On appelle effectif total le nombre de valeurs de la série.

Ici, l'effectif total est 43.

On appelle effectif de A le nombre de fois où A apparait dans la série.

L'effectif de **178** est 3 car il y a 3 personnes ayant **178** mois.

On appelle fréquence de A le quotient de l'effectif de A par l'effectif total.

La fréquence de **178** est $\frac{3}{43}$, ce qui signifie que 3 élèves sur les 43 du groupe ont **178** mois.

$$\text{Fréquence de A} = \frac{\text{Effectif de A}}{\text{Effectif total}}$$

Les fréquences sont (souvent) exprimées en pourcentages.

La fréquence de **178** est $\frac{3}{43} \approx 7\%$.

$$\text{Fréquence de A en \%} = \text{Fréquence de A} \times 100 = \frac{\text{Effectif de A}}{\text{Effectif total}} \times 100$$

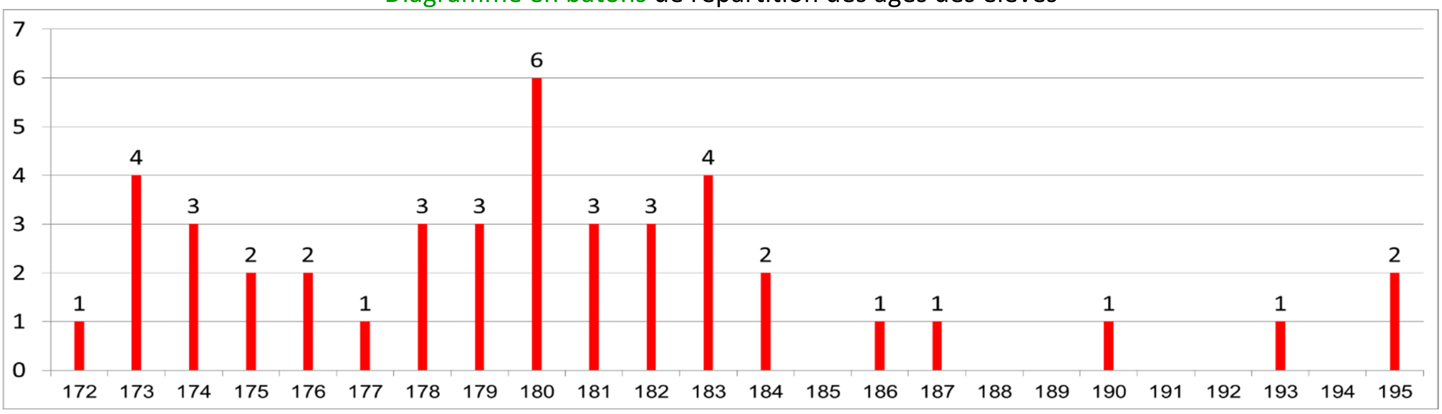
Exemple des âges

Age en mois	172	173	174	175	176	177	**178**	179	180	181	182	183	184	186	187	190	193	195	Total
Effectif	1	4	3	2	2	1	3	3	6	3	3	4	2	1	1	1	1	2	43
Fréquence	1/43	4/43	3/43	2/43	2/43	1/43	3/43	3/43	6/43	3/43	3/43	4/43	2/43	1/43	1/43	1/43	1/43	2/43	1
Fréquence en %	2 %	9 %	7 %	5 %	5 %	2 %	7 %	7 %	14 %	7 %	7 %	9 %	5 %	2 %	2 %	2 %	2 %	5 %	100 %

÷ 43

× 100

Diagramme en bâtons de répartition des âges des élèves



Définitions

On appelle *minimum* la plus petite valeur de la série.

Le minimum est 172.

On appelle *maximum* la plus grande valeur de la série.

Le maximum est 195.

On appelle *étendue* l'écart entre le minimum et le maximum.

L'étendue est 195 - 172 = 23 mois.

On appelle *médiane* une valeur qui partage la série en deux sous-parties de même effectif tel que dans une sous-partie sont regroupées toutes les valeurs inférieures ou égales à la médiane et dans l'autre sont regroupées toutes les valeurs supérieures ou égales à la médiane.

Remarque

Une médiane peut être une valeur de la série (ou non).

Comment déterminer une médiane ?

On ordonne (on trie) la série (par ordre croissant).

On détermine l'effectif total N.

Si N est impair, la médiane est une des valeurs de la série ; c'est la $\frac{N+1}{2}$ ème.

Si N est pair, une médiane est entre deux valeurs de la série ; entre la $\frac{N}{2}$ ème et la $\frac{N}{2}+1$ ème.

Astuce pour déterminer la position de la médiane

On calcule $\frac{N+1}{2}$

Si on trouve un nombre entier, c'est la position de la médiane dans la série

Si ce n'est pas un nombre entier, la position de la médiane est donnée par les deux entiers consécutifs encadrant $\frac{N+1}{2}$.

Exemple 1

Dans la série 1 ; 2 ; 5 ; 7 ; 8 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10, l'effectif total est 9, donc la médiane est la 5$^{\text{ème}}$ valeur de la série ordonnée.

La série ordonnée est 1 ; 2 ; 5 ; 5 ; **6** ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 donc la médiane est **6**.

On prend les 2 entiers consécutifs encadrant $\frac{10+1}{2} = 5{,}5$ On calcule $\frac{9+1}{2} = 5$

Exemple 2

Dans la série 1 ; 2 ; 6 ; 7 ; **11 ; 15** ; 15 ; 17 ; 17 ; 17, l'effectif total est 10, donc une médiane est entre la 5$^{\text{ème}}$ valeur et la 6$^{\text{ème}}$ valeur de la série ordonnée.

La série est déjà ordonnée donc la médiane est **entre 11 et 15**. On peut prendre n'importe quelle valeur, mais on choisit le « milieu » de l'intervalle. Ici, une médiane est 13.

Exemple des âges

Dans l'exemple des âges, l'effectif total est 43. Une médiane est la 22-ème valeur de la série ordonnée.

La série ordonnée commence par : 172, 173, 173, 173, 173, 174, 174, 174, 175, 175, 176, 176, 177, 178, 178, 178, 179, 179, 179, 180, 180, **180**, 180, 180, 180, 181, 181, 181 …

Inutile de trier toute la série car il nous faut juste la 22$^{\text{ème}}$ valeur.

La médiane est **180** mois.

Comment calculer la moyenne - *Méthode 1*

1. On additionne toutes les valeurs.
2. On divise par l'effectif total.

Exemple des âges

Soit M la moyenne de cette série.

M = (180 + 176 + 179 + 176 + 182 + 178 + 184 + 181 + 179 + 173 + 182 + 187 + 175 + 181 + 174 + 183 + 178 + 180 + 178 + 184 + 173 + 175 + 173 + 180 + 195 + 179 + 174 + 182 + 172 + 174 + 195 + 183 + 193 + 190 + 181 + 173 + 177 + 180 + 183 + 180 + 183 + 186 + 180) ÷ 43

= 7751 ÷ 43 ≈ 180,2 mois.

L'âge moyen est de 7750 ÷ 43 ≈ 180,2 mois.

Comment calculer la « moyenne pondérée » - *Méthode 2*

1. On calcule la somme de toutes les valeurs en utilisant le tableau d'effectifs.
2. On divise par l'effectif total.

Exemple des âges

Age en mois	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	186	187	190	193	195
Effectif	1	4	3	2	2	1	3	3	6	3	3	4	2	1	1	1	1	2

Soit M la moyenne de cette série.

M = (172 + 4×173 + 3×174 + 2×175 + 2×176 + 177 + 3×178 + 3×179 + 6×180 + 3×181 + 3×182
+ 4×183 + 2×184 + 186 + 187 + 190 + 193 + 2×195) ÷ 43
= 7751 ÷ 43 ≈ 180,2 mois.

L'âge moyen est de 7750 ÷ 43 ≈ 180,2 mois.

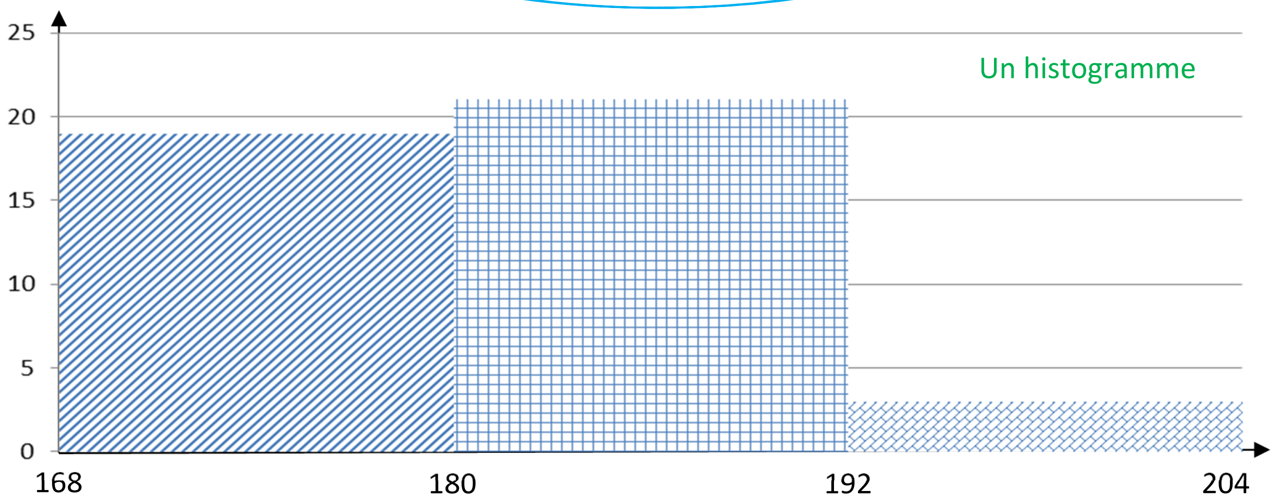
Partage en classes de valeurs

On regroupe les valeurs de la série en classes de valeurs.
Par exemple, on peut regrouper les personnes qui ont le même nombre d'années.

Age en mois	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	186	187	190	193	195
Effectif	1	4	3	2	2	1	3	3	6	3	3	4	2	1	1	1	1	2

Age en mois	Effectif	Fréquence	Fréquence en %	Angle sur le diagramme circulaire en degré	Centre de la classe
[168 ; 180[	19	19/43	44 %	159°	174
[180 ; 192[	21	21/43	49 %	176°	186
[192 ; 204[	3	3/43	7 %	25°	198
Total	43	1	100 %	360°	

×360 ×3,6 $\times \frac{360}{43}$



Définition

On appelle *centre de la classe*, le milieu de l'intervalle définissant la classe.

Exemple des âges.

Le milieu de l'intervalle [168 ; 180[est 174. Pour le calculer on effectue $\frac{168+180}{2}$.

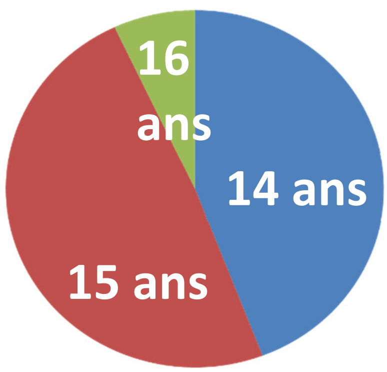
<u>Calcul</u> d'une valeur approchée de la moyenne.
On suppose que les valeurs sont regroupées aux centres des classes.
Soit M une valeur approchée de la moyenne de cette série.
M = (19×174 + 21×186 + 3×198) ÷ 43 = 7806 ÷ 43 ≈ 181,5 mois.
Une valeur approchée de l'âge moyen est $\boxed{7806 \div 43 \approx 181{,}5 \text{ mois}}$.

Remarques

Le résultat est très bon.

La précision de la mesure est le mois et on trouve 1,3 mois d'écart avec la valeur exacte.

Cette méthode (malgré sa forte approximation) donne souvent de très bons résultats.



Un diagramme circulaire