MATHEMATIQUES

4ème

2024-2025

Hervé LESTIENNE

www.lesmathsdherve.net

LES NOMBRES RELATIFS

Définitions

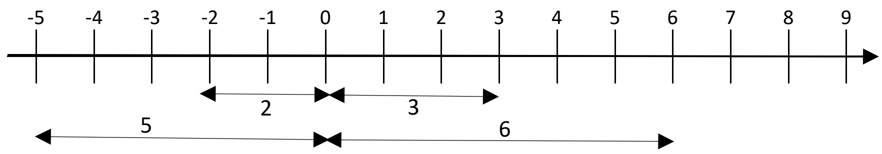
Un *nombre relatif* est un nombre précédé d'un signe.
Si ce signe est "+", le nombre est dit *positif*.
Si ce signe est "-", le nombre est dit *négatif*.
La *distance à zéro* d'un nombre relatif est la distance séparant ce nombre de 0.

Astuce

La distance à zéro d'un nombre est le nombre privé de son signe.

Exemples

La distance à zéro de -5 est 5.
La distance à zéro de -2 est 2.
La distance à zéro de +3 est 3.
La distance à zéro de +6 est 6.



Convention

Les mathématiciens ont décidé de ne pas mettre de signe devant les nombres positifs.

Propriété admise

Pour additionner deux nombres relatifs (a + b), on procède comme suit :

Les 2 nombres (*a et b*) ont le même signe ?

oui : On additionne les distances à zéro

non : On soustrait les distances à zéro

Le résultat est du même signe que le nombre (*a ou b*) qui avait la plus grande distance à zéro.

Exemples

5 + 3 = 8	5 et 3 ont le même signe, donc on additionne leurs distances à zéro. Le résultat est du signe de 5 donc il est positif.
(-5) + (-3) = -8	-5 et -3 ont le même signe, donc on additionne leurs distances à zéro. Le résultat est du signe de -5 donc il est négatif.
5 + (-3) = 2	5 et -3 n'ont pas le même signe, donc on soustrait leurs distances à zéro. Le résultat est du signe de 5 donc il est positif.
(-5) + 3 = -2	-5 et 3 n'ont pas le même signe, donc on soustrait leurs distances à zéro. Le résultat est du signe de -5 donc il est négatif.

Définition

L'opposé d'un nombre a est le nombre noté – a tel que a + (-a) = 0.

Astuce

Pour prendre l'opposé d'un nombre, il suffit de changer son signe.

Exemples

L'opposé de 2 est noté -2 et vaut -2
L'opposé de -2 est noté - (-2) et vaut 2 donc - (-2) = +2.

Définition

Soustraire, c'est additionner l'opposé.

Exemples	**Astuce**
Soustraire 2 c'est additionner –2.	- 2 = + (-2)
Soustraire 5 c'est additionner –5.	- 5 = + (-5)
Soustraire -4 c'est additionner 4.	- (-4) = + 4
Soustraire -7 c'est additionner 7.	- (-7) = +7

Exemples de soustractions

5 – 2 = 5 + (-2) = 3   4 – 5 = 4 + (-5) = -1   5 – (-4) = 5 + 4 = 9   6 – (-7) = 6 + 7 = 13

Comment calculer une somme algébrique ?

On supprime les parenthèses, puis on effectue le travail précédent en additionnant les positifs et les négatifs (veiller à bien garder le signe qui se trouve devant un nombre lors du "réarrangement").

Exemple

(-5) + 3 – 4 + 5 + (-3) – 4 + 7 = -5 + 3 - 4 + 5 - 3 - 4 + 7 = -5 - 4 - 3 - 4 + 3 + 5 + 7 = -16 + 15 = -1

Propriété règle des signes admise

Le produit de deux nombres de même signe est positif

Le produit de deux nombres de signes contraires est négatif.

×	+	-
+	+	-
-	-	+

La règle des signes s'applique aussi pour les divisions.

Comment multiplier deux nombres relatifs ?

1. On multiplie leurs distances à zéro.
2. On détermine le signe en utilisant la règle des signes.

Exemples de produits ou quotients

5 × 2 = +10	5 × (-2) = -10	(-5) × 2 = -10	(-5) × (-2) = +10
Les 2 nombres ont le même signe, le produit est positif.	Les 2 nombres n'ont pas le même signe, le produit est négatif.	Les 2 nombres n'ont pas le même signe, le produit est négatif.	Les 2 nombres ont le même signe, le produit est positif.
10 ÷ 2 = +5	10 ÷ (-2) = -5	(-10) ÷ 2 = -5	(-10) ÷ (-2) = +5

Propriété admise

Pour déterminer le signe d'une expression numérique dans laquelle n'interviennent que des multiplications et des divisions, il suffit de compter le nombre de facteurs négatifs.

Si ce nombre de facteurs négatifs est pair (0, 2, 4, 6, 8 …), le produit est positif.

Si ce nombre de facteurs négatifs est impair (1, 3, 5, 7, 9…), le produit est négatif.

Exemples

2 × 5 × (- 4) × 3 × (- 4) × (- 4) × 5 est négatif car il y a un nombre impair (3) de facteurs négatifs.

2 × (- 5) × (- 4) × 3 × (- 4) × (- 4) × 5 est positif car il y a un nombre pair (4) de facteurs négatifs.

Remarque

Peu importe le nombre de facteurs positifs ou s'il y a plus de facteurs positifs que négatifs ; seul compte le nombre de facteurs négatifs.

ATTENTION, la propriété précédente ne "marche" que s'il y a des multiplications et des divisions. Il ne faut surtout pas l'utiliser lorsqu'il y a des additions ou des soustractions.

Propriété priorités opératoires admise

Pour calculer une expression numérique, on procède selon l'ordre suivant :

1. On calcule l'intérieur des parenthèses. Si des parenthèses sont imbriquées (l'une dans l'autre), on commence par celles qui sont le plus à l'intérieur.
2. On effectue les multiplications et divisions (de gauche à droite).
3. On termine toujours par les additions et soustractions (de gauche à droite).

Exemple

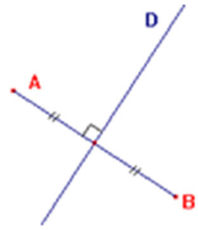
10 + 5 × (3 – (3 + 5 × 7)) = 10 + 5 × (3 – (3 + 35)) = 10 + 5 × (3 – 38) = 10 + 5 × (- 35) = 10 + (- 175) = - 165

Astuce

Dans le cas de parenthèses imbriquées, il peut être utile de mettre en couleur les paires de parenthèses pour repérer les calculs à effectuer.

SYMETRIES axiales et centrales, TRANSLATIONS

I – Symétrie axiale

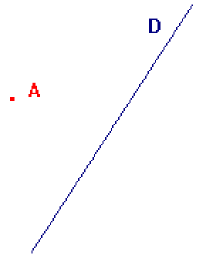


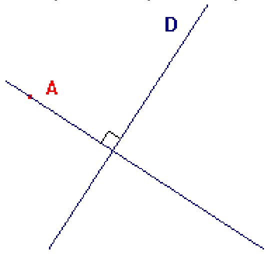
Définition

Deux points A et B sont symétriques par rapport à la droite D si D est la médiatrice de [AB].

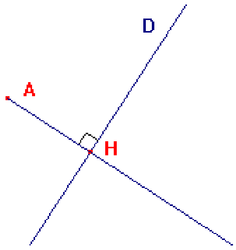
Construction avec la réquerre

Pour construire l'image du point A par la symétrie par rapport à la droite D il faut :

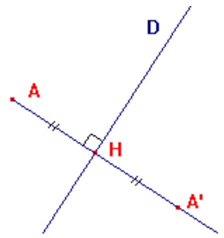




Tracer la droite perpendiculaire à D qui passe par A.



Elle coupe D en H.

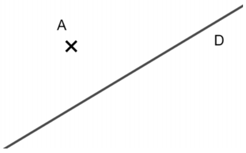


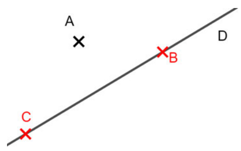
Placer le point A' tel que H soit le milieu de [AA'].

A' est le *symétrique* de A par la symétrie d'axe D.
On dit aussi que A' est l'*image* de A par la symétrie d'axe D.

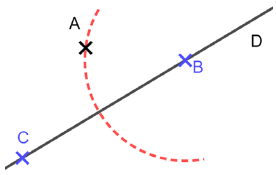
Construction avec le compas et la règle non graduée

Pour construire l'image du point A par la symétrie par rapport à la droite D il faut :

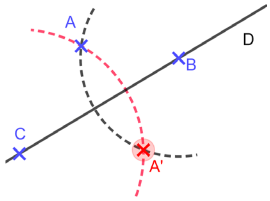




Placer deux points (B et C) sur D.



Tracer le cercle de centre B qui passe par A.



Tracer le cercle de centre C qui passe par B ; il coupe le cercle précédent en A'.

Propriété admise

La symétrie axiale conserve les angles, les distances, les surfaces, les formes …

Remarque

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

Pour construire la figure ci-contre, j'ai :

1. Tracer l'image A' de A
2. Tracer l'image B' de B
3. Construis le carré A'B'C'D'.
4. Tracer la diagonale [A'C']
5. Placer son milieu O'.
6. Tracer le segment [B'O'].
7. Placer le point M' au milieu de [A'B'].
8. Tracer le demi-cercle de diamètre [A'B'] à l'extérieur du carré.

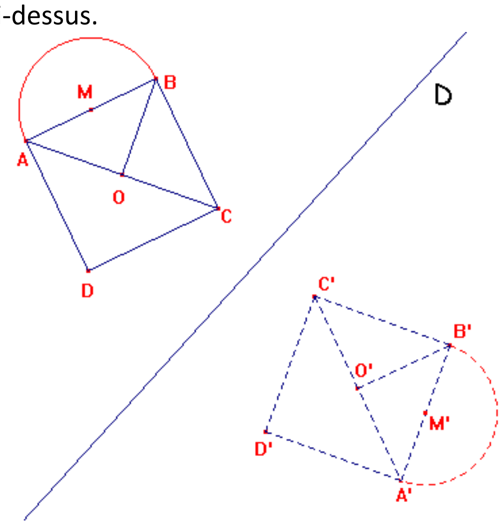


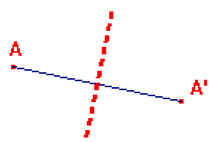
Image par la symétrie d'axe D

Pour mémoire

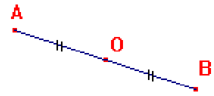
La symétrie axiale « correspond » à un miroir.

Caractériser

Pour caractériser une symétrie axiale, il faut donner son axe.
Pour retrouver son axe, il suffit de connaître un point et son image.
L'axe de symétrie est la médiatrice du segment formé par ces 2 points.



II – Symétrie centrale

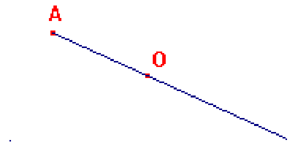


Définition

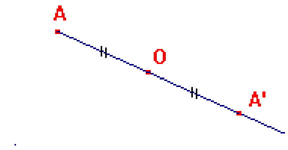
Deux points A et B sont symétriques par rapport au point O si O est le milieu de [AB].

Construction

Pour construire l'image du point A par la symétrie par rapport au point O il faut :



Tracer la demi-droite [AO).



Placer le point A' sur [AO) tel que O soit le milieu de [AA'].

A' est le *symétrique* de A par la symétrie de centre O.
On dit aussi que A' est l'*image* de A par la symétrie de centre O.

Propriété admise

La symétrie centrale conserve les angles, les distances, les surfaces, les formes …

Remarque

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

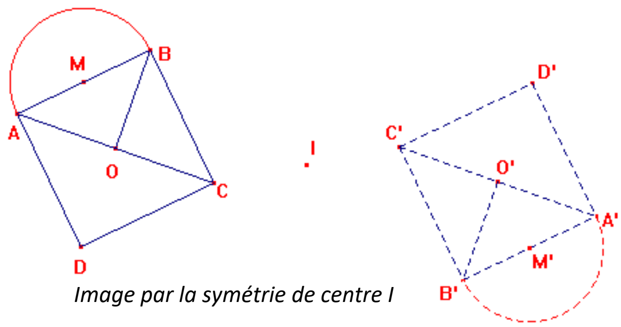


Image par la symétrie de centre I

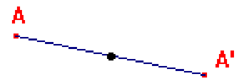
Pour mémoire

La symétrie centrale « correspond » à un demi-tour autour du centre de symétrie.

Caractériser

Pour caractériser une symétrie centrale, il faut donner son centre.

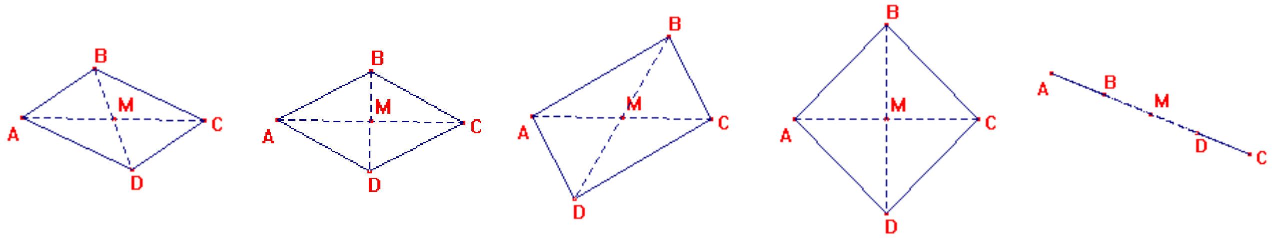
Pour retrouver son centre, il suffit de connaître un point et son image. Le centre de symétrie est le milieu du segment formé par ces 2 points.



III – Translation

Définition

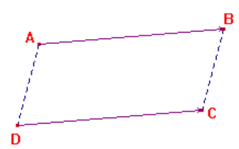
ABCD est un *parallélogramme* si ces diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu.



Dans tous les cas ci-dessus, ABCD est un parallélogramme car M est le milieu des diagonales [AC] et [BD].

Définition

On dit que l'image du point D est le point C par la *translation* qui envoie A sur B si ABCD est un parallélogramme.

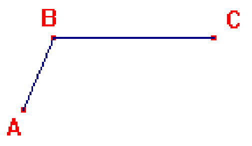
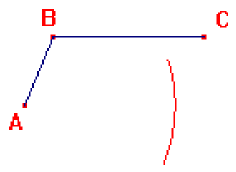
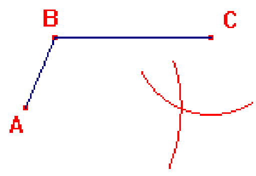
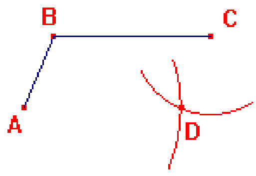
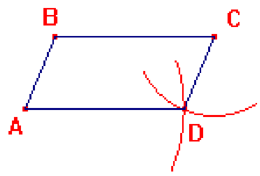


Construction

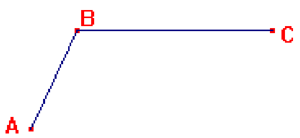
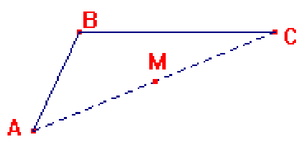
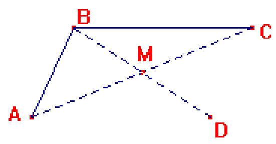
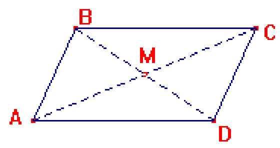
Pour construire l'image du point C dans la translation qui envoie A sur B il faut construire le parallélogramme ABC'C.

C' est le *translaté* de C par la translation qui envoie A sur B.
On dit aussi que C' est l'*image* de C par la translation qui envoie A sur B.

Construction d'un parallélogramme (lorsque l'on en donne 3 sommets A, B et C) avec règle et compas

				
	Tracer un arc de cercle de centre A et de rayon BC.	Tracer un arc de cercle de centre C et de rayon AB.	Les deux demi-cercle se coupent en D.	Tracer les segments [CD] et [AD]

Construction d'un parallélogramme (lorsque l'on en donne 3 sommets A, B et C) avec règle graduée

			
Tracer le segment [AC]	Construire le point M, milieu de [AC]	Tracer le point D, symétrique de B par rapport au point M.	Tracer les segments [CD] et [AD].

Propriété admise

La translation conserve les angles, les distances, les surfaces, les formes …

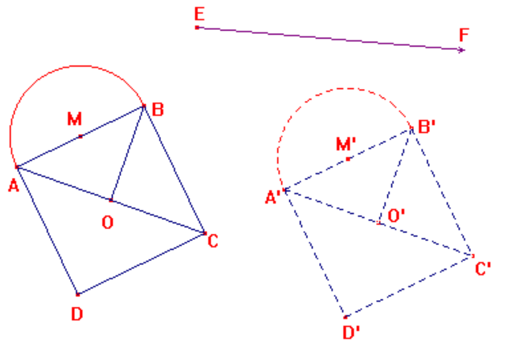


Image par la translation qui envoie E sur F

Remarque

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

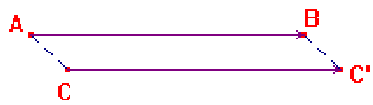
Pour mémoire

La translation « correspond » à un glissement sans tourner.

Caractériser

Pour caractériser une translation, il faut donner un point et son image ou le vecteur dont les extrémités sont ces points.

Dans l'exemple, on peut parler de la translation qui envoie A sur B ou de la translation associée au vecteur $\overrightarrow{AB}$. On peut aussi parler de la translation qui envoie C sur C' ou de la translation associée au vecteur $\overrightarrow{CC'}$.



FRACTIONS : additions et soustractions

Définitions

Un nombre en *écriture fractionnaire* s'écrit sous la forme :

$$\frac{a}{b} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{le numérateur} \\ \leftarrow \text{le dénominateur} \end{matrix}$$

On parle de *fraction* lorsque l'on a une écriture fractionnaire qui a un numérateur et un dénominateur entiers.

On parle de *fraction décimale* lorsque l'on a une fraction dont le dénominateur est 10, 100, 1000, 10000 ...

Propriété d'égalité de fractions - admise

Deux fractions sont égales, si pour passer de l'une à l'autre, on multiplie (ou on divise) le numérateur et dénominateur de la première par un même nombre non nul afin d'obtenir le numérateur et le dénominateur de la deuxième :

$$\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$$

Exemples

$$\frac{3 \times 7}{5 \times 7} = \frac{21}{35} \qquad \frac{3 \times 8}{7 \times 8} = \frac{24}{56} \qquad \frac{45 \div 5}{25 \div 5} = \frac{9}{5}$$

Définitions

Simplifier une fraction, c'est écrire une fraction égale à la première telle que la distance à zéro de son numérateur (et de son dénominateur) soit plus petite.

Exemples

$$\frac{36 \div 2}{48 \div 2} = \frac{18 \div 2}{24 \div 2} = \frac{9 \div 3}{12 \div 3} = \frac{3}{4} \qquad \frac{45 \div 3}{60 \div 3} = \frac{15 \div 5}{20 \div 5} = \frac{3}{4}$$

Remarque

Dans les calculs, il faut toujours simplifier (le plus possible) les résultats obtenus.

Propriétés admises : Critères de divisibilité

Un nombre entier est divisible par 2 s'il est pair (il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8).

- 186 se divise par 2 car il est pair (il se termine par 6).
- 187 ne se divise pas par 2 car il est impair.

Un nombre entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

- 237 est divisible par 3 car 2+3+7=12 et 12 est divisible par 3.
- 238 n'est pas divisible par 3 car 2+3+8=13 et 13 n'est pas divisible par 3.

Un nombre entier est divisible par 4 si le nombre formé par ses 2 derniers chiffres est divisible par 4.

- 25 292 est divisible par 4 car 92 est divisible par 4, car 92=40+40+12 et 12 est divisible par 4.
- 45 267 n'est pas divisible par 4 car 67 n'est pas divisible par 67=40+27 et 27 n'est pas divisible par 4.

Un nombre entier est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou par 5.

- 185 se divise par 5 car il se termine par 5.
- 190 se divise par 5 car il se termine par 0.
- 187 ne se divise pas par 5.

Un nombre entier est divisible par 6 s'il est divisible par 2 ET par 3, donc s'il est pair ET si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

- 894 se divise par 6 car
  - il se divise par 2 (il est pair),
  - ET il se divise par 3 car 8+9+4=21 qui se divise par 3.
- 165 ne se divise pas par 6 car
  - il ne se divise par 2 (il est impair),
  - même si il se divise par 3 car 1+6+5 = 12 qui se divise par 3.
- 898 ne se divise pas par 6 car
  - il se divise par 2 (il est pair),
  - mais il ne se divise pas par 3 car 8+9+8=25 qui ne se pas divise par 3.
- 77 ne se pas divise par 6 car
  - il ne se divise par 2 (il est impair),
  - il ne se divise par 3 car 7+7=14 qui ne se divise pas par 3.

Un nombre entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

- 567 est divisible par 9 car 5+6+7=18 et 18 est divisible par 9.
- 123 456 789 est divisible par 9 car 1+2+3+4+5+6+7+8+9=45 et 45 est divisible par 9 car 4+5=9 qui est divisible par 9.
- 238 n'est pas divisible par 9 car 2+3+8=13 et 13 n'est pas divisible par 9.

Remarque

Un nombre divisible par 9 est obligatoirement divisible par 3.

Définition

Un nombre est dit premier s'il n'a que 1 et lui-même comme diviseur (un nombre premier a exactement 2 diviseurs).

Exemples

Le nombre 3 est premier car ses diviseurs sont 1 et 3.
Le nombre 6 n'est pas premier car il se divise par 1, 2, 3 et 6.
Le nombre 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur.

Astuce pour trouver tous les nombres premiers en partant de 2 : crible d'Ératosthène (c'est un astronome, géographe, philosophe et mathématicien grec : -276 à -194).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On écrit tous les nombres de 1 à 100.

1 n'est pas premier donc on le barre

Le premier nombre non barré est 2 donc c'est un nombre premier.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On barre tous les multiples de 2 qui ne sont donc pas premiers.

Le premier nombre non barré après 2 est 3 ; c'est un nombre premier.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On barre tous les multiples de 3 qui ne sont donc pas premiers.

Le premier nombre non barré après 3 est 5 ; c'est un nombre premier.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On barre tous les multiples de 5 qui ne sont donc pas premiers.

Le premier nombre non barré après 5 est 7 ; c'est un nombre premier.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On barre tous les multiples de 7 qui ne sont donc pas premiers.

Le premier nombre non barré après 7 est 11 ; c'est un nombre premier.

On s'arrête ici car $11^2 = 11 \times 11 > 100$.
Tous les nombres non barrés sont premiers.

Les nombres premiers jusqu'à 100 sont : ❤ **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23**, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97.

Comment décomposer un nombre en produits de facteurs premiers.

On veut décomposer 450.

450		On réécrit le nombre à gauche de la ligne verticale
225	2	2 est le plus petit nombre premier qui divise 450 450 = 2 × 225 On écrit 225 à gauche et 2 à droite
75	3	3 est le plus petit nombre premier qui divise 225 225 = 3 × 75 On écrit 75 à gauche et 3 à droite
25	3	3 est le plus petit nombre premier qui divise 75 75 = 3 × 25
5	5	5 est le plus petit nombre premier qui divise 25 25 = 5 × 5
1	5	5 est le plus petit nombre premier qui divise 5 5 = 1 × 5 On s'arrête lorsqu'il y a 1 dans la colonne de gauche.

$450 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5^2$

Exemples de décomposition en facteurs premiers

Décomposons 180

180	
90	2
45	2
15	3
5	3
1	5

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

Décomposons 380

380	
190	2
95	2
19	5
1	19

$380 = 2^2 \times 5 \times 19$

Utilisation de la calculatrice

Décomposons 180

CASIO FX92	TI COLLEGE PLUS
4 ; 3 Y c &	180 SECONDE ▸ SIMP

On obtient : $2^2 \times 3^2 \times 5$

Exemple de simplification de fraction

Simplifier la fraction $\dfrac{21000}{29700}$

Décomposons 21000

21000	
10500	2
5250	2
2625	2
875	3
175	5
35	5
7	5
1	7

$21000 = 2^3 \times 3 \times 5^3 \times 7$

Décomposons 29700

29700	
14850	2
7425	2
2475	3
825	3
275	3
55	5
11	5
1	11

$29700 = 2^2 \times 3^3 \times 5^2 \times 11$

$$\frac{21000}{29700} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 7}{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 11} = \frac{2 \times 5 \times 7}{3 \times 3 \times 11} = \frac{70}{99}$$

Comment transformer une écriture fractionnaire en fraction ?

On utilise la règle d'égalité des fractions pour obtenir un numérateur et un dénominateur entiers (on peut multiplier par 10, 100, 1000, 10000, …).

Il peut être nécessaire de simplifier la fraction

Exemples

$$\frac{5{,}2}{2} = \frac{5{,}2 \times 10}{2 \times 10} = \frac{52 \div 2}{20 \div 2} = \frac{26 \div 2}{10 \div 2} = \frac{13}{5} \qquad \frac{4{,}51}{3{,}7} = \frac{4{,}51 \times 100}{3{,}7 \times 100} = \frac{451}{370}$$

Propriété d'addition de fractions de même dénominateur - admise

$$\frac{a}{d}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{d} \quad \text{et} \quad \frac{a}{d}-\frac{b}{d}=\frac{a-b}{d}$$

Exemples

$$\frac{3}{4}+\frac{6}{4}=\frac{3+6}{4}=\frac{9}{4} \qquad \frac{1}{3}-\frac{8}{3}=\frac{1-8}{3}=\frac{-7}{3} \qquad \frac{-1}{5}-\frac{8}{5}=\frac{-9}{5} \qquad \frac{-15}{6}-\frac{-8}{6}=\frac{-15-(-8)}{6}=\frac{-15+8}{6}=\frac{-7}{6}$$

Définition

Mettre deux fractions au même dénominateur, c'est se "débrouiller" (en utilisant la propriété d'égalité de fractions) pour que les deux fractions aient le même dénominateur.

Remarque

Un dénominateur commun peut être le produit des dénominateurs.

Comment additionner deux fractions de dénominateurs différents ?

On se "débrouille" pour les mettre au même dénominateur puis on utilise la propriété d'addition ci-dessus.

Exemples

$$\frac{7}{2}+\frac{5}{3}=\frac{7\times 3}{2\times 3}+\frac{5\times 2}{3\times 2}=\frac{21}{6}+\frac{10}{6}=\frac{31}{6} \qquad \frac{5}{34}+\frac{8}{51}=\frac{5\times 51}{34\times 51}+\frac{8\times 34}{51\times 34}=\frac{255}{1734}+\frac{272}{1734}=\frac{527}{1734}$$

Remarque

Cette méthode "marche" très bien, mais il faut penser à simplifier les fractions. Ici, $\frac{527}{1734}=\frac{31}{102}$.

Astuce

Pour chercher un dénominateur commun, on cherche un multiple commun aux deux dénominateurs.
Pour cela, on décompose les deux nombres.

Décomposons 34		Décomposons 51	
34		51	
17	2	17	3
1	17	1	17
34 = 2 × 17		51 = 3 × 17	

On cherche un nombre qui contient tous les facteurs ci-dessus :

2 × 3 × 17 = 102.

$$\frac{5}{34}+\frac{8}{51}=\frac{5\times 3}{34\times 3}+\frac{8\times 2}{51\times 2}=\frac{15}{102}+\frac{16}{102}=\frac{31}{102}$$

Propriété admise

Prendre une quantité d'une fraction c'est multiplier le nombre par la fraction.

Exemples

Prendre $\frac{3}{4}$ de 126 € c'est prendre $\frac{3}{4}\times 126$ €.

Rouler $\frac{2}{5}$ de 800 km c'est rouler $\frac{2}{5}\times 800$ km.

Remarque

Le mot « de » en français se traduit par « × » en mathématiques.

Comment multiplier un nombre par une fraction ?

Méthode 1	Méthode 2	Méthode 3
$\frac{a}{b}\times c=(a\div b)\times c$	$\frac{a}{b}\times c=(a\times c)\div b$	$\frac{a}{b}\times c=a\times(c\div b)$
$\frac{12}{6}\times 7=(12\div 6)\times 7=2\times 7=14$	$\frac{2}{3}\times 9=(2\times 9)\div 3=18\div 3=6$	$\frac{5}{7}\times 21=5\times(21\div 7)=5\times 3=15$

Notation

La fraction $\frac{p}{100}$ est notée p %

La fraction $\frac{15}{100}$ est notée 15 %

Exemple de problème

Sébastien achète un pull. Le prix affiché est de 65€, mais il bénéficie d'une remise de 15%.
Combien va-t-il payer ?

Calculons le montant de la remise

$15\ \%$ de 65 € = $\frac{15}{100}$ de 65

$$= \frac{15}{100} \times 65 = (15 \times 65) \div 100 = 975 \div 100 = 9{,}75$$

La remise est de 9,75 €.

Je calcule le prix réduit.

65 – 9,75 = 55,25

Le prix réduit est de **55,25 €**.

PROPORTIONNALITE, VITESSES et ECHELLES

I – Proportionnalité

Définition

Deux séries de valeurs sont dites *proportionnelles* si pour passer de l'une à l'autre on multiplie toujours par un même nombre appelé le *coefficient de proportionnalité*.

Exemple

Volume de sans plomb 95 (E10) en litres	15	23	12
Prix en €	22,80	34,96	18,24

$\downarrow \times 1{,}52$

Propriété admise

$a \times \frac{b}{a} = b$ Pour passer du nombre a au nombre b, on multiplie par $\frac{b}{a}$.

$a \xrightarrow{\times \frac{b}{a}} b$ $\quad$ $départ \xrightarrow{\times \frac{arrivée}{départ}} arrivée$

Exemples

$5 \xrightarrow{\times 3} 15$ $\quad$ $5 \xrightarrow{\times 13} 65$ $\quad$ $5 \xrightarrow{\times \frac{645}{5} \text{ ou } \times 129} 645$ $\quad$ $5 \xrightarrow{\times \frac{7}{5}} 7$ $\quad$ $7 \xrightarrow{\times \frac{3}{7}} 3$

Comment déterminer si un tableau correspond à une situation de proportionnalité ?

1°) On calcule, séparément, les quotients qui permettent de passer d'une valeur à la valeur correspondante.

2°) Si les quotients sont tous égaux, c'est une situation de proportionnalité.
Sinon, cela ne l'est pas.

Exemple 1

Masse de fraises en kg	3	5	7
Prix en €	5,10	8,50	11,90

Pour passer de 3 à 5,1 on multiplie par $\frac{5{,}1}{3} = 1{,}7$

Pour passer de 5 à 8,5 on multiplie par $\frac{8{,}5}{5} = 1{,}7$

Pour passer de 7 à 11,9 on multiplie par $\frac{11{,}9}{7} = 1{,}7$

C'est bien une situation de proportionnalité de coefficient 1,7.

Exemple 2

Masse de poires en kg	3	5	7
Prix en €	4,80	8,00	11,00

$\frac{4{,}80}{3} = 1{,}6$ $\quad$ $\frac{8{,}00}{5} = 1{,}6$ $\quad$ $\frac{11{,}00}{7} \approx 1{,}57$

Ce n'est pas une situation de proportionnalité.

Exemple 3

9	15	18
12	20	24

$\frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ $\quad$ $\frac{20}{15} = \frac{4}{3}$ $\quad$ $\frac{24}{18} = \frac{4}{3}$

C'est une situation de proportionnalité.

Propriété des produits en croix - admise

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $a \times d = b \times c$ $\quad$ Si $a \times d = b \times c$ alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Exemple 1

On veut comparer les fractions $\frac{65}{91}$ et $\frac{115}{161}$

On calcule séparément les produits en croix : $65 \times 161 = 10\,465$ et $91 \times 115 = 10\,465$

donc $65 \times 161 = 91 \times 115$ donc $\frac{65}{91} = \frac{115}{161}$

Exemple 2

On veut comparer les fractions $\frac{7}{13}$ et $\frac{9}{17}$

On calcule séparément les produits en croix : 7×17 = 119 et 13×9 = 117

donc 7×17 ≠ 13×9 donc $\frac{7}{13} \neq \frac{9}{17}$

Exemple 3

Trouve le nombre manquant $\frac{5}{4} = \frac{7}{?}$

Les fractions sont égales donc les produits en croix sont égaux

5 × ? = 4 × 7 *On effectue les produits en croix*

5 × ? = 28 *On simplifie chaque membre*

? = 5,6 *On divise par 5*

Astuce

S'il n'y a qu'une valeur inconnue, on multiplie les deux quantités qui « touchent » celle qu'on cherche puis on divise le résultat par la quantité qui est « en face ».

Exemple 4

$$\frac{5}{4} = \frac{7}{a} \qquad a = \frac{4 \times 7}{5} = 5{,}6$$

$$\frac{5}{4} = \frac{b}{3} \qquad b = \frac{3 \times 5}{4} = 3{,}75$$

$$\frac{c}{4} = \frac{7}{2} \qquad c = \frac{4 \times 7}{2} = 14$$

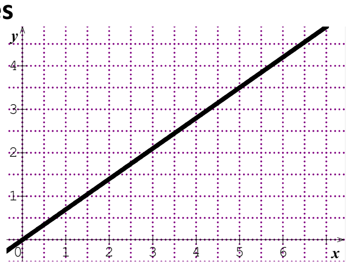
$$\frac{5}{d} = \frac{7}{3} \qquad d = \frac{5 \times 3}{7} = \frac{15}{7}$$

Propriété – admise

La représentation graphique d'une situation de proportionnalité est

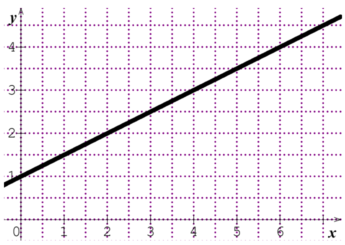
- une droite
- qui passe par l'origine du repère

Exemples

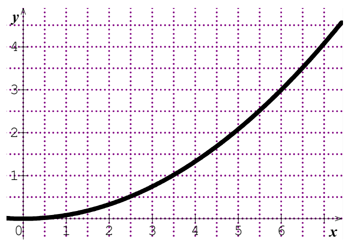


Une droite qui passe par l'origine

Situation de proportionnalité



Une droite qui ne passe pas par l'origine



Pas une droite

Pas une situation de proportionnalité

II – Vitesse, distance et temps

3,4h ≠ 3h 40 min

3,4 h = 3h + 0,40h = 3h 24min

× 60

3h 18min ≠ 3,18h

3h 18 min = 3h + 0,30h = 3,3h

÷ 60

Conversion avec la calculatrice

CASIO FX92	Texas Instruments
3,15 Y {	3,15 $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{\to\text{DMS}}$ $\boxed{\text{entrer}}$

3,15 h = 3h 9min

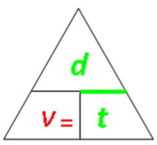
CASIO FX92	Texas Instruments
3 { 12 { Y {	3 $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{°}$ 12 $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{'}$ $\boxed{\text{entrer}}$

3h 12min = 3,2h

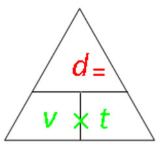
Propriétés admises

Si *d* est la distance, *t* le temps et *v* la vitesse moyenne on a alors

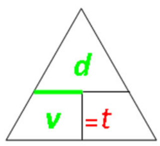
$v = \frac{d}{t}$



$d = v \times t$



$t = \frac{d}{v}$



Exemple 1 : recherche de la vitesse moyenne

Clément roule pendant 3h et parcourt 183km. Quelle est sa vitesse moyenne ?

Calculons sa vitesse moyenne

Méthode 1

$$v = \frac{d}{t} = \frac{183}{3} = 61$$

Méthode 2

Distance	Temps
183 km	3h
?	1h

$\downarrow \div 3$

$$? = \frac{183 \times 1}{3} = 61$$

Sa vitesse moyenne est de $\boxed{\text{61 km/h}}$.

Exemple 2 : recherche de la distance parcourue

Mathieu roule pendant 3h à 43 km/h de moyenne. Quelle est la distance parcourue ?

Calculons la distance parcourue

Méthode 1

$$d = v \times t = 43 \times 3 = 129$$

Méthode 2

Distance	Temps
43 km	1h
?	3h

$\downarrow \times 3$

$$? = \frac{43 \times 3}{1} = 129$$

La distance parcourue est $\boxed{\text{129 km}}$.

Exemple 3 : recherche du temps de parcours

Pauline marche pendant 12km à la vitesse moyenne de 4,5 km/h. Quel est le temps de parcours ?

Calculons le temps de parcours

Méthode 1

$$t = \frac{d}{v} = \frac{12}{4{,}5} = \frac{8}{3}$$

Méthode 2

Distance	Temps
4,5 km	1h
12 km	?

$\rightarrow \div 4{,}5$

$$? = 12 \div 4{,}5 = \frac{8}{3}$$

Le temps de parcours est de $\frac{8}{3}$h = $\boxed{\text{2h 40min}}$.

Exemple 4 : conversions de vitesse

Convertir 135 km/h en m/s

Distance	Temps
135 km	1 h
=	=
135 000 m	3 600 s
?	1 s

$\downarrow \div 3\,600$

? = 135 000 ÷ 3 600 = 37,5

135 km/h = 37,5 m/s

Convertir 15 m/s en km/h

Distance	Temps
15 m	1 s
? m	3 600 s
=	=
? km	1h

$\downarrow \times 3600$

? = 15 × 3600 = 54 000 m = 54 km

15 m/s = 54 km/h

III – Ratios

Remarque

Deux nombres a et b sont dans le *ratio* 2 : 3 si $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$ | Trois nombres a, b, c sont dans le *ratio* 2 : 3 : 7 si $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{7}$

Exemple

$\frac{2}{3} = \frac{10}{15} = \frac{8}{12}$ donc 2, 10 et 8 sont dans le ratio 3 : 15 : 12

$\frac{10}{12} = \frac{5}{6} = \frac{15}{18}$ donc 10, 5 et 15 sont dans le ratio 12 : 6 : 18

Exemple 1
La vinaigrette est faite avec de l'huile, de la moutarde et du vinaigre dans le ratio 6 : 1 : 3.
On veut utiliser 2 cuillers de moutarde.
Combien faut-il prévoir des autres ingrédients ?

Je calcule la part des ingrédients

Ingrédient	Huile	Moutarde	Vinaigre
Ratio	6	1	3
Nombre de cuillers	?	2	??

$\times 2$

Le coefficient de proportionnalité est 2 donc il faut 2×6 = **12 cuillers d'huile** et 2×3 = **6 cuillers de vinaigre**.

Exemple 1
La vinaigrette est faite avec de l'huile, de la moutarde et du vinaigre dans le ratio 6 : 1 : 3.
On veut Obtenir 5 litres de vinaigrette.
Combien faut-il prévoir de chaque ingrédient ?

Je calcule la part des ingrédients

Ingrédient	Huile	Moutarde	Vinaigre	Total
Ratio	6	1	3	10
Volume	?	?	?	5 litres

$\times 0,5$

Le coefficient de proportionnalité est 0,5 donc il faut 0,5×6 = **3 L d'huile** et 0,5×1 = **1,5 L de moutarde** et 0,5×3 = **1,5 L de vinaigre**.

IV – Echelles

Remarque

Pour représenter la réalité, il peut être nécessaire de l'agrandir ou de la réduire.
S'il s'agit d'un agrandissement, on multiplie les distances par un nombre supérieur à 1.
S'il s'agit d'une réduction, on multiplie les distances par un nombre entre 0 et 1.

Réduction

En bas à gauche, il est indiqué que l'échelle est de 1 : 10 000 ; on devrait écrire $\frac{1}{10\ 000}$.

Cela signifie que pour passer de la réalité à la carte, on a multiplié les distances par $\frac{1}{10\ 000}$.

Par exemple, si on cherche les points à 350 m de l'entrée du collège, on doit chercher la distance correspondante sur la carte, on calcule :

$$350 \times \frac{1}{10\ 000} = 0,0350$$

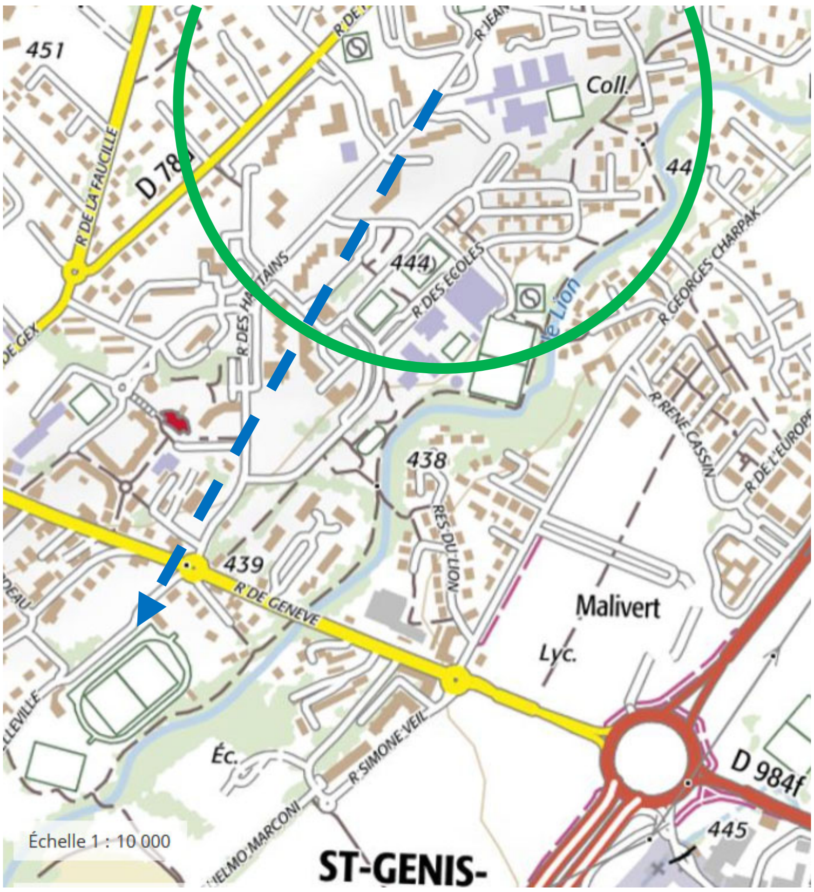
Sur la carte, cela correspond à 0,035 m = 3,5 cm
Ce sont donc tous les points sur le cercle vert.

L'échelle $\frac{1}{10\ 000}$ signifie aussi que 1 cm sur la carte représente 10 00 cm = 100 m de la réalité.
On aurait aussi pu la trouver avec un tableau de proportionnalité en utilisant 350 m = 35 000 cm

Carte	Réalité
1 cm	10 000 cm
?	35 000 cm

$$? = \frac{1 \times 35\ 000}{10\ 000} = 3,5$$

On retrouve le rayon de 3,5 cm.



www.geoportail.fr

Pour aller de l'entrée du collège au stade, il y a 8 cm (la flèche bleue pointillée). On peut déterminer la distance entre le collège et le stade :

Carte	Réalité
1 cm	10 000 cm
8 cm	?

$$? = \frac{8 \times 10\,000}{1} = 80\,000$$

Il y a 80 000 cm = 800 m pour aller du collège au stade.

Agrandissement

L'échelle est ici de $\frac{20}{1}$. Cela signifie que pour passer de la réalité à la photo, on a multiplié les distances par $\frac{20}{1}$.
Cela signifie aussi que 20 cm sur la photo représentent 1 cm dans la réalité.

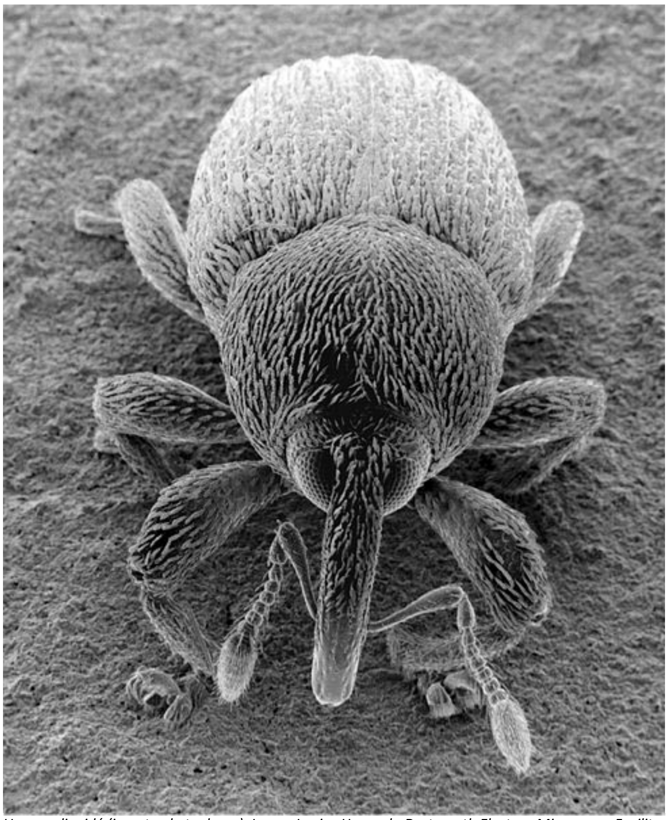
Pour connaître sa taille réelle, on la mesure sur la photo ; on trouve ici 8,6 cm.

Je calcule sa taille réelle :

Photo	Réalité
20 cm	1 cm
8,6 cm	?

$$? = \frac{8{,}6 \times 1}{20} = 0{,}43$$

La taille est donc de 0,43 cm = 4,3 mm.



Un curculionidé (insecte phytophage). Image Louisa Howard - Dartmouth Electron Microscope Facility.

CALCUL LITTERAL

I – L'utilisation de lettres dans les calculs

Histoire

Le calcul littéral (calcul avec des lettres) appelé aussi calcul algébrique, du mot algèbre, est un puissant outil développé par le mathématicien français François Viète (1540 – 1603) qui a attribué une lettre à des quantités inconnues dans des calculs, mais aussi à des coefficients.

L'aire d'un carré est A = $c \times c$; le périmètre d'un cercle est $P = \pi \times d$.

L'usage de la lettre X remonte à René Descartes. Mais l'idée de donner un nom à l'inconnue d'un problème est plus ancienne encore, puisqu'elle vient du mathématicien grec Diophante III^e siècle, qui l'appelait « arithmos », le nombre. Plus tard, le mathématicien perse Al-Kwarizmi IX^e siècle la nomma « shay », la chose en arabe. Ce mot est plus connu en français populaire dans sa forme plurielle chouïa, "un chouïa" signifiant "un peu".

Cette pratique parvint en France grâce aux Espagnols, qui transcrivaient ce mot en « xay ». Descartes simplifia en ne gardant que l'initiale, d'où « X ». Son usage s'étendit ensuite, en particulier au monde judiciaire.

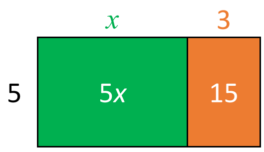
Al-Khwarizmi, (latinisé en Algoritmi ou Algorizmi), né dans les années 780, probablement à Khiva dans la région du Khwarezm (d'où il prend son nom), dans l'actuel Ouzbékistann, mort vers 850 à Bagdad, est un mathématicien, géographe, astrologue et astronome perse, membre de la Maison de la sagesse de Bagdad. Ses écrits, rédigés en langue arabe, puis traduits en latin à partir du XII^e siècle, ont permis l'introduction de l'algèbre en Europe. Sa vie s'est déroulée en totalité à l'époque de la dynastie abbasside.

Son nom latinisé est à l'origine du mot algorithme et le titre de l'un de ses ouvrages (Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison) est à l'origine du mot algèbre. L'utilisation des chiffres arabes et leur diffusion dans le Moyen-Orient et en Europe sont dues à un autre de ses livres nommé Traité du système de numération des Indiens qui fut diffusé via la langue arabe dans tout l'empire abbasside. Al-Khawarizmi a classifié les algorithmes existants, en particulier selon leurs critères de terminaison, mais ne revendique pas leur invention : l'algorithme le plus connu du monde est celui d'Euclide et les premiers algorithmes connus le furent, sans surprise, dans un pays devant gérer des calculs élaborés de l'impôt : à Babylone.

⚠ Attention

Il faut prêter une attention toute particulière à la graphie de la lettre x pour ne pas la confondre avec le signe de multiplication ×.

Remarque calcul de $5 \times (x + 3)$

Géométrique	" Répétitif "	Avec la simple distributivité
 $5 \times (x + 3) = 5x + 15$	$5 \times (x + 3) = x + 3$ $+ x + 3$ $+ x + 3$ $+ x + 3$ $+ x + 3$ $= 5 \times x + 5 \times 3$ $= 5x + 15$	$5 \times (x + 3) = 5 \times x + 5 \times 3 = 5x + 15$

Propriété simple distributivité - admise

$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$

Exemples de distribution

$5 \times (2x + 7) = 10x + 35$ $\quad$ $8 \times (x - 3) = 8x – 24$ $\quad$ $- 6 \times (x + 7) = -6x - 42$ $\quad$ $- 4 \times (x - 7) = -4x + 28$

Remarque sur la réduction des produits

On peut toujours réduire les produits.

$2x \times 3x$	$- 5 \times 3x$	$3x \times 7y$
$= 6x^2$	$= - 15x$	$= 21xy$

Remarque sur la réduction de sommes

$3x + 2x$	$15x - 8x$	$4x - 12x$	$15x^2 - 8x^2$	$33x - 5x^2 + 7x + 11x^2$
$= 5x$	$= 7x$	$= -8x$	$= 7x^2$	$= 40x + 6x^2$

$5x^2 + 3x$ ne peut pas se réduire

Remarque

Dans tous les exercices, il faudra réduire les expressions (*même si cela n'est pas indiqué dans l'énoncé*).

Remarque gestion du signe « - »

$-(2x + 7) = - 2x - 7$ $\quad$ $-(x - 3) = - x + 3$ $\quad$ $-(-3x + 7) = +3x - 7$ $\quad$ $-(-6x - 7) = +6x + 7$

Exemples complexes

$3\ (x + 5) + 7\ (x + 4) = 3x + 15 + 7x + 28 = 10x + 43$

$6\ (x - 4) - 9\ (x + 2) = 6x - 24 - 9x - 18 = -3x - 42$

$5\ (x + 7) + 8\ (x - 3) = 5x + 35 + 8x - 24 = 13x + 11$

$6\ (x - 7) + 9x\ (3x - 2) = 6x - 42 + 27x^2 - 18x = 27x^2 - 12x - 42$

Propriété double distributivité

(a + b) (c + d) = ac + ad + bc + bd

	c	d
a	ac	ad
b	bc	bd

Démonstration

(a + b) (c + d) = (a + b) × c + (a + b) × d = ac + ad + bc + bd

Exemples

$(x + 3)\ (x + 7) = x^2 + 7x + 3x + 21 = x^2 + 10x + 21$

$(x + 5)\ (x - 4) = x^2 - 4x + 5x - 20 = x^2 + x - 20$

$(x - 4)\ (x - 6) = x^2 - 6x - 4x + 24 = x^2 - 10x + 24$

$(x + 2)\ (x + 3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$

$(x - 8)\ (x + 3) = x^2 + 3x - 8x - 24 = x^2 - 5x - 24$

$(2x + 3)\ (3x + 7) = 6x^2 + 14x + 9x + 21 = 6x^2 + 23x + 21$

Exemples complexes

$(x + 5)\ (x + 4) + (x + 2)\ (x + 9) = x^2 + 4x + 5x + 20 + x^2 + 9x + 2x + 18 = 2x^2 + 20x + 38$

$(x + 5)\ (x - 4) + (x - 2)\ (x - 9) = x^2 - 4x + 5x - 20 + x^2 - 9x - 2x + 18 = 2x^2 - 10x - 2$

$(x + 3)\ (x - 2) + 5\ (x - 6)\ (x + 7) = x^2 - 2x + 3x - 6 + 5 \times (x^2 + 7x - 6x - 42) = x^2 + x - 6 + 5x^2 + 35x - 42x - 210$
$= 6x^2 - 6x - 216$

$(x - 2)\ (x - 3) - (x - 5)\ (x + 4) = x^2 - 3x - 2x + 6 - (x^2 + 4x - 5x - 20) = x^2 - 3x - 2x + 6 - x^2 - 4x + 5x + 20 = -4x + 26$

$(2x + 7)\ (3x - 4) - 8\ (x + 2)\ (x - 5) = 6x^2 - 8x + 21x - 28 - 8 \times (x^2 - 5x + 2x - 10) = 6x^2 - 8x + 21x - 28 - 8x^2 + 40x - 16x + 80$
$= -2x^2 + 37x + 52$

II – Equations

Histoire

Dans l'Antiquité, vers -2000 avant JC, les Babyloniens savaient déjà résoudre des problèmes par équations, mais leur résolution n'a rien à voir avec les techniques actuelles. On le sait grâce à un célèbre document conservé au British Muséum à Londres, le Papyrus Rhind, qui date de -1650.

Le Papyrus Rhind a été écrit par un scribe égyptien nommé Ahmès. Son nom vient de l'Écossais Henry Rhind qui l'acheta en 1858 à Louxor. Il aurait été découvert sur le site de la ville de Thèbes, en Egypte Actuellement conservé au British Museum (Londres), il contient 87 problèmes résolus d'arithmétique, d'algèbre, de géométrie et d'arpentage, sur plus de 5 m de longueur et 32 cm de large. Ahmès indique que son papyrus est, en partie, une copie de résultats plus anciens (vers -2000) remontant aux Babyloniens.

« J'ai une pierre mais je ne l'ai pas pesée. Après avoir enlevé un septième de son poids, j'ai pesé le tout et j'ai trouvé 1 ma-na (unité de masse). Quel était le poids de la pierre à l'origine ? ».

Définition

$$\overbrace{\underbrace{5x + 5}_{\text{Membre de gauche}} = \underbrace{3x - 17}_{\text{Membre de droite}}}^{\text{Une équation}}$$

Remarque

Lorsque l'on a une équation, le signe d'égalité ne signifie pas que les deux membres sont identiques et sont deux écritures différentes d'une même expression algébrique.

Le signe d'égalité signifie que pour certaines valeurs numériques données aux inconnues, les deux membres seront égaux.

Définition

On dit qu'un nombre est *une solution* d'une équation l'égalité entre les deux membres est vraie lorsqu'on remplace l'inconnue par ce nombre.

Exemples

Pour l'équation $5x + 5 = 3x - 17$, tester si 2 et -11 sont des solutions.

Méthode « littéraire »	Méthode en ligne	Méthode en colonne
Lorsque $x = 2$ alors • le membre de gauche devient $5 \times 2 + 5 = 15$ • et le membre de droite devient $3 \times 2 - 17 = -11$ Donc **2 n'est pas une solution**.	Si $x = 2$ alors $5x + 5 = 5 \times 2 + 5 = 15$ et $3x - 17 = 3 \times 2 - 17 = -11$ Donc **2 n'est pas une solution**.	Si $x = 2$ alors $5x + 5$ | $3x - 17$ $= 5 \times 2 + 5$ | $= 3 \times 2 - 17$ $= 15$ | $= -11$ Donc **2 n'est pas une solution**.

Méthode « littéraire »	Méthode en ligne	Méthode en colonne
Lorsque $x = -11$ alors • le membre de gauche devient $5 \times (-11) + 5 = -50$ • et le membre de droite devient $3 \times (-11) - 17 = -50$ Donc **-11 est une solution**.	Si $x = -11$ alors $5x + 5 = 5 \times (-11) + 5 = -50$ et $3x - 17 = 3 \times (-11) - 17 = -50$ Donc **-11 est une solution**.	Si $x = -11$ alors $5x + 5$ | $3x - 17$ $= 5 \times (-11) + 5$ | $= 3 \times (-11) - 17$ $= -50$ | $= -50$ Donc **-11 est une solution**.

Définition

Résoudre une équation c'est trouver toutes les solutions.

Exemples

Equation n'ayant pas de solution	Equation ayant une seule solution	Equation ayant une infinité de solution
$2x + 3 = 2x + 5$	$5x + 5 = 3x - 17$	$2(x + 5) - 2 = 2x + 8$
On ne peut pas trouver de valeur numérique pour laquelle l'égalité serait vraie. On peut tester tous les nombres, il n'y a pas de solution.	La solution de cette équation est –11.	On peut tester toutes les autres valeurs, l'égalité ne serait pas vraie. Quelle que soit la valeur numérique par laquelle on remplace *x*, l'égalité sera vraie.

Remarque

Dans les exercices de collège, (presque toutes) les équations auront une solution unique.

Propriété - admise

On ne change pas les solutions d'une équation si :

1. On additionne (ou soustrait), une même expression aux deux membres de l'équation.
2. On multiplie (ou divise) les deux membres de l'équation par une même expression NON NULLE.

Exemples d'application de la propriété

$x + 5 = 8$

-5 -5 — On veut faire disparaître +5 ; il faut faire -5 dans les deux membres.

$x = 3$

La solution est **3**.

$x + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{3}$ $-\frac{1}{3}$ — On veut faire disparaître $+\frac{1}{3}$; il faut faire $-\frac{1}{3}$ dans les deux membres.

$x = \frac{1}{6}$

La solution est $\mathbf{\frac{1}{6}}$.

$x - 7 = 4$

+7 +7 — On veut faire disparaître -7 ; il faut faire +7 dans les deux membres.

$x = 11$

La solution est **11**.

$x - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$+\frac{1}{4}$ $+\frac{1}{4}$ — On veut faire disparaître $-\frac{1}{4}$; il faut faire $+\frac{1}{4}$ dans les deux membres.

$x = \frac{3}{4}$

La solution est $\mathbf{\frac{3}{4}}$.

$3x = 12$

÷3 ÷3 — On veut faire disparaître le 3 devant le *x* donc le ×3 devant le *x* ; il faut diviser les deux membres par 3.

$x = 4$

La solution est **4**.

$-7x = 42$

÷(-7) ÷(-7) — On veut faire disparaître le -7 devant le *x* donc le ×(-7) devant le *x* ; il faut diviser les deux membres par -7.

$x = -6$

La solution est **-6**.

$\frac{x}{5} = 2$ ×5 ×5 x = 10 La solution est **10**.	$\frac{x}{-3} = 7$ ×(-3) ×(-3) x = -21 La solution est **-21.**
On veut faire disparaître la division par 5 ; il faut faire ×5 dans les deux membres.	On veut faire disparaître la division par (-7) ; il faut faire ×(-7) dans les deux membres.

Exemple de résolution d'une équation

Résoudre l'équation 2 (x + 5) = 6x + 7.

2 (x + 5) = 6x + 7	On réécrit l'équation
2x + 10 = 6x + 7	On simplifie l'écriture de chacun des membres en développant et réduisant
-6x -10 -6x -10 -4x = -3	On isole les inconnues dans un membre et les nombres dans l'autre en utilisant le point 1 de la propriété ci-dessus.
÷ (-4) ÷ (-4) x = 0,75	Pour trouver x, on divise par le nombre devant x en utilisant le point 2 de la propriété ci-dessus.
Si x = 0,75 alors 2 (x + 5) = 2 × (0,75 + 5) = 11,5 6x + 7 = 6 × 0,75 + 7 = 11,5	On teste si le nombre trouvé est bien une solution de l'équation en remplaçant dans l'équation du départ.
La solution de l'équation est $\boxed{\textbf{0,75}}$.	On conclue par une phrase.

En contrôle, il faut écrire tout ce qui est en noir (la colonne de gauche) ci-dessus.

III – Problèmes

Exemple 1

Dans la cour de la ferme, il n'y a que des poules et des lapins. J'ai compté 174 têtes et 400 pattes. Combien y a-t-il d'animaux de chaque sorte ?

Soit L le nombre de lapins.	Expliciter l'inconnue. C'est souvent la question qui nous indique quelle inconnue choisir.
(tableau ci-dessous) 4 × L + 2 × (174 – L) = 400	Ecrire l'équation
4L + 348 – 2L = 400 2L + 348 = 400 - 348 - 348 2L = 52 ÷ 2 ÷ 2 L = 26	Résoudre l'équation
Il y a **26 lapins** et 174-26 = **148 poules**.	Interpréter le résultat
Vérification : Têtes : 26 + 148 = 174 Pattes : 4×26 + 2×148 = 400 *C'est bon*	Vérifier sur les données du problème

	Lapins	Poules	Total
Têtes	L	174 - L	174
Pattes	4 × L	2 × (174 – L)	400

Exemple 2

Jules à 8 ans et son père a 42 ans.
Dans combien de temps l'âge du père sera-t-il le triple de celui de son fils ?

Soit x le nombre d'années à attendre.

	Jules	Père
Aujourd'hui	8	42
Dans x années	$8 + x$	$42 + x$

Père = 3 × Jules

$42 + x = 3 \times (8 + x)$

$42 + x = 24 + 3x$

$-24 \quad -x \quad -24 \quad -x$

$18 = 2x$

$\div 2 \quad \div 2$

$9 = x$

Il faut attendre **9 ans**.

Vérification : dans 9 ans
Jules : 8 + 9 = 17 ans
Père : 42 + 9 = 51 ans
3 × 17 = 51
C'est bon

Exemple 3

Un kilogramme de poire coûte un euro de plus qu'un kilogramme de pommes.
Marion a acheté trois kilos de pommes et cinq kilos de poires.
Elle a payé vingt-cinq euros.
Quel est le prix d'un kilo de pommes ? de poires ?

Soit x le prix d'un kilogramme de pommes.

	Pommes	Poires	Total
Quantité en kg	3	5	
Prix au kg	x	$x + 1$	
Prix à payer	$3 \times x$	$5 \times (x + 1)$	25

$3 \times x + 5 \times (x + 1) = 25$

$3x + 5x + 5 = 25$

$8x + 5 = 25$

$-5 \quad -5$

$8x = 20$

$\div 8 \quad \div 8$

$x = 2{,}5$

Les pommes coûtent **2,5 €** au kilo
et les poires coûtent 2,5 + 1 = **3,5 €** au kilo.

Vérification :
Pommes : 3 × 2,5 = 7,5
Poires : 5 × 5,5 = 17,5
Total : 7,5 + 17,5 = 25
C'est bon

Exemple 4

Marina et Karima pensent au même nombre.
Marina ajoute 8 et multiplie le résultat par 3.
Karima multiplie le résultat par 5 et ajoute 6.
Curieusement, elles trouvent le même résultat.
A quel nombre ont-elles pensé au départ ?

Soit x le nombre pensé au départ.

	Marina	Karima
Départ	x	x
Après calcul	$3 \times (x + 8)$	$5 \times x + 6$

$3 \times (x + 8) = 5 \times x + 6$

$3x + 24 = 5x + 6$

$-3x \quad -6 \quad -3x \quad -6$

$18 = 2x$

$\div 2 \quad \div 2$

$9 = x$

Elles ont pensé au nombre **9**.

Vérification :
Marina : 9 → 9 + 8 = 17 → 17 × 3 = 51
Karima : 9 → 9 × 5 = 45 → 45 + 6 = 51
C'est bon

Exemple 5

Kassandra et Arthur ont le même nombre de billes.
Si Arthur donne 10 billes à Kassandra, elle en aura alors deux fois pl
que lui.
Combien ont-ils de billes au départ ?

Soit x le nombre de billes au départ.

	Kassandra	Arthur
Départ	x	x
Après calcul	$x + 10$	$x - 10$

Kassandra = 2 × Arthur

$x + 10 = 2 \times (x - 10)$

$x + 10 = 2x - 20$

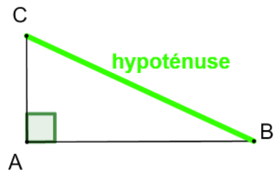
$30 = x$

Ils avaient chacun 30 billes.

Vérification :
Kassandra : 30 → 30 + 10 = 40
Arthur : 30 → 30 – 10 = 20
2 × 20 = 40
C'est bon

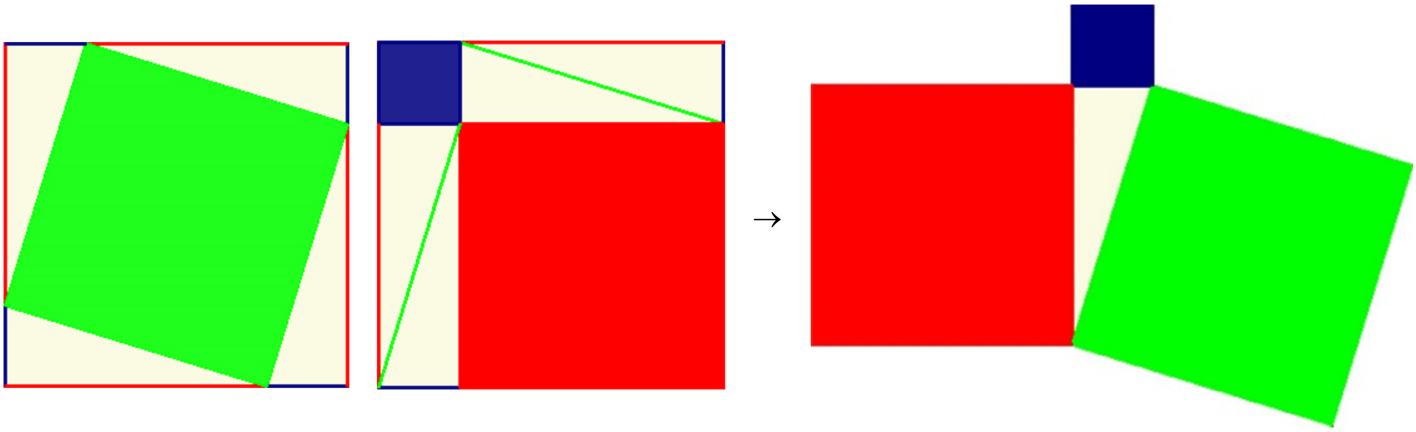
Définition

Dans un triangle, le côté opposé à l'angle droit est appelé l'*hypoténuse*.



Remarque

C'est le plus grand côté du triangle rectangle.



Théorème de Pythagore admis

- Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.
- Si ABC un triangle rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

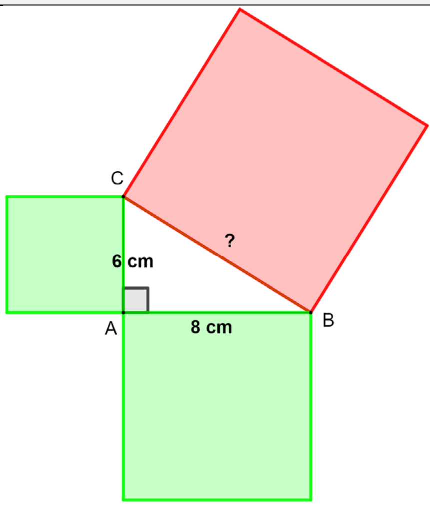
⚠ ***Cette propriété ne s'applique que dans les triangles rectangles.***

Exemples

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que

- $AB = 6$ cm
- $AC = 8$ cm

Calcule BC.



Dans ABC rectangle en A,
d'après le théorème de Pythagore

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$BC^2 = 6^2 + 8^2$

$BC^2 = 36 + 64$

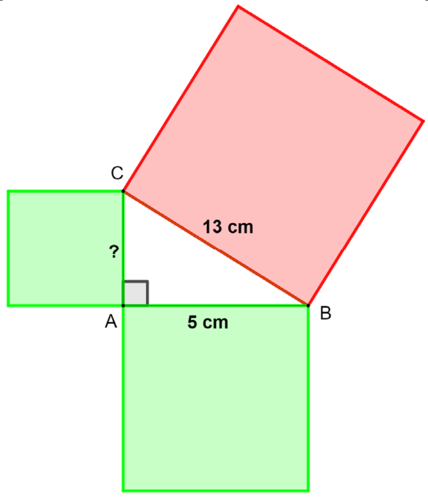
$BC^2 = 100$

$BC = \sqrt{100} = \boxed{10\text{ cm}}$

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que

- $AB = 5$ cm
- $BC = 13$ cm

Calcule AC.



Dans ABC rectangle en A,
d'après le théorème de Pythagore

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$13^2 = 5^2 + AC^2$

$169 = 25 + AC^2$

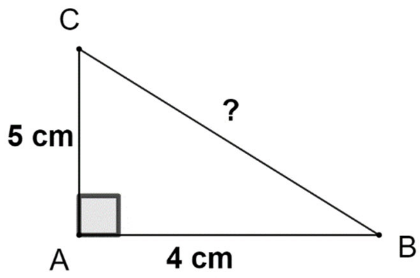
$-25 \qquad -25$

$144 = \qquad AC^2$

$AC = \sqrt{144} = \boxed{12\text{ cm}}$

Exemple avec valeur approchée

Soit ABC un triangle rectangle tel que AB = 4 cm et AC = 5 cm.
Calcule BC.



Dans ABC rectangle en A,
d'après le théorème de Pythagore
$BC^2 = AB^2 + AC^2$
$BC^2 = 4^2 + 5^2$
$BC^2 = 16 + 25$
$BC^2 = 41$
$BC = \sqrt{41} \approx 6{,}4$ cm

Utilisation de la calculatrice

CASIO FX92	TI collège
Pour calculer $6^2 + 8^2$, je tape	
6g + 8g Y	6g + 8g =

CASIO FX92	TI collège
Pour calculer $\sqrt{100}$, je tape	
c g 100 Y	c g 100 =

Propriété réciproque de Pythagore admise

- Dans un triangle, si le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle est rectangle.
- Soit ABC un triangle.
  Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors le triangle est rectangle et [BC] est l'hypoténuse, le triangle est rectangle en A.

Propriété contraposée de Pythagore admise

- Dans un triangle, si le carré du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle n'est pas rectangle.
- Soit ABC un triangle.
  Si [BC] est le plus grand côté et $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ alors le triangle n'est pas rectangle.

Exemples

Prouver qu'un triangle est rectangle.	Prouver qu'un triangle n'est pas rectangle.
Soit ABC un triangle tel que AB = 3 cm, BC = 4 cm et AC = 5 cm. *Quelle est la nature de ABC ?*	*Soit ABC un triangle tel que AB = 5 cm, BC = 7 cm et AC = 6 cm.* *Quelle est la nature de ABC ?*
Si ABC était rectangle, l'hypoténuse serait [AC] car c'est le plus grand côté. AC^2 | $AB^2 + BC^2$ $= 5^2$ | $= 3^2 + 4^2$ $= 25$ | $= 9 + 16$ | $= 25$ Donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc d'après la propriété réciproque de Pythagore, **ABC est rectangle en B** *(car [AC] est l'hypoténuse)*.	Si ABC était rectangle, l'hypoténuse serait [BC] car c'est le plus grand côté. BC^2 | $AB^2 + AC^2$ $= 7^2$ | $= 5^2 + 6^2$ $= 49$ | $= 25 + 36$ | $= 61$ Donc $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ d'après la contraposée de Pythagore alors **ABC n'est pas rectangle**.