



# Sommaire



Utilisation libre à la condition de l'attribuer à l'auteur en citant son nom. *Cela ne signifie pas que l'auteur est en accord avec l'utilisation qui est faite de ses œuvres.*  
Autorisation de reproduire, diffuser, et à modifier tant que l'utilisation n'est pas commerciale.

Sommaire.....	2
LES NOMBRES RELATIFS .....	3
SYMETRIES axiales et centrales, TRANSLATIONS.....	5
I – Symétrie axiale.....	5
II – Symétrie centrale.....	6
III – Translation .....	6
FRACTIONS : additions et soustractions .....	8
PROPORTIONNALITE, VITESSES et ECHELLES.....	13
I – Proportionnalité.....	13
II – Vitesse, distance et temps .....	15
III – Echelles .....	17
Réduction.....	17
Agrandissement.....	18
CALCUL LITERAL .....	19
I – L’utilisation de lettres dans les calculs.....	19
II – Equations .....	20
III – Problèmes .....	22
Triangles rectangles : PYTHAGORE .....	24
FRACTIONS : multiplications et divisions.....	26
Théorème de THALES, TRIANGLES SEMBLABLES, HOMOTHETIES .....	28
I – Théorème de Thalès .....	28
II – Triangles semblables.....	30
III – Homothéties : agrandissement/réduction .....	30
PUISSANCES de 10 .....	32
STATISTIQUES .....	35
SOLIDES, agrandissement/réduction.....	39
I – Rappel sur les aires .....	39
II – La famille des prismes.....	39
III – La famille des pyramides .....	40
IV – Conversions .....	41
V – Agrandissements / réductions.....	42
VI – Repérage.....	43
FONCTIONS : généralités .....	46
Triangles rectangles : COSINUS .....	49
PROBABILITES .....	51
Progression annuelle .....	52

# LES NOMBRES RELATIFS

## Définitions

Un *nombre relatif* est un nombre précédé d'un signe.

Si ce signe est "+", le nombre est dit *positif*.

Si ce signe est "-", le nombre est dit *négatif*.

La *distance à zéro* d'un nombre relatif est la distance séparant ce nombre de 0.

## Astuce

La distance à zéro d'un nombre est le nombre privé de son signe.

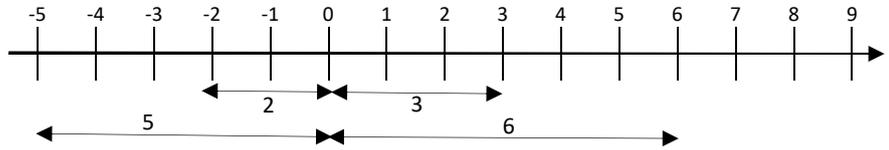
## Exemples

La distance à zéro de -5 est 5.

La distance à zéro de -2 est 2.

La distance à zéro de +3 est 3.

La distance à zéro de +6 est 6.

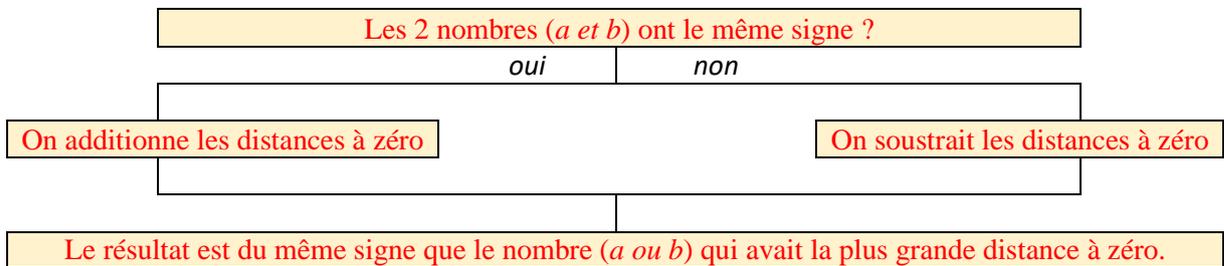


## Convention

Les mathématiciens ont décidé de ne pas mettre de signe devant les nombres positifs.

## Propriété admise

Pour additionner deux nombres relatifs ( $a + b$ ), on procède comme suit :



## Exemples

$5 + 3 = 8$       5 et 3 ont le même signe, donc on additionne leurs distances à zéro. Le résultat est du signe de 5 donc il est positif.

$(-5) + (-3) = -8$       -5 et -3 ont le même signe, donc on additionne leurs distances à zéro. Le résultat est du signe de -5 donc il est négatif.

$5 + (-3) = 2$       5 et -3 n'ont pas le même signe, donc on soustrait leurs distances à zéro. Le résultat est du signe de 5 donc il est positif.

$(-5) + 3 = -2$       -5 et 3 n'ont pas le même signe, donc on soustrait leurs distances à zéro. Le résultat est du signe de -5 donc il est négatif.

## Définition

L'*opposé* d'un nombre  $a$  est le nombre noté  $-a$  tel que  $a + (-a) = 0$ .

## Astuce

Pour prendre l'opposé d'un nombre, il suffit de changer son signe.

## Exemples

L'opposé de 2 est noté -2 et vaut -2

L'opposé de -2 est noté - (-2) et vaut 2 donc  $-(-2) = +2$ .

## Définition

Soustraire, c'est additionner l'opposé.

### Exemples

Soustraire 2 c'est additionner -2.

Soustraire 5 c'est additionner -5.

Soustraire -4 c'est additionner 4.

Soustraire -7 c'est additionner 7.

### Astuce

$$-2 = +(-2)$$

$$-5 = +(-5)$$

$$-(-4) = +4$$

$$-(-7) = +7$$

## Exemples de soustractions

$$5 - 2 = 5 + (-2) = 3$$

$$4 - 5 = 4 + (-5) = -1$$

$$5 - (-4) = 5 + 4 = 9$$

$$6 - (-7) = 6 + 7 = 13$$

## Comment calculer une somme algébrique ?

On supprime les parenthèses, puis on effectue le travail précédent en additionnant les positifs et les négatifs (veiller à bien garder le signe qui se trouve devant un nombre lors du "réarrangement").

### Exemple

$$(-5) + 3 - 4 + 5 + (-3) - 4 + 7 = -5 + 3 - 4 + 5 - 3 - 4 + 7 = -5 - 4 - 3 - 4 + 3 + 5 + 7 = -16 + 15 = -1$$

### Propriété règle des signes admise

Le produit de deux nombres de même signe est positif

Le produit de deux nombres de signes contraires est négatif.

La règle des signes s'applique aussi pour les divisions.

×	+	-
+	+	-
-	-	+

### Comment multiplier deux nombres relatifs ?

1. On multiplie leurs distances à zéro.
2. On détermine le signe en utilisant la règle des signes.

### Exemples de produits ou quotients

$$5 \times 2 = +10$$

Les 2 nombres ont le même signe, le produit est positif.

$$10 \div 2 = +5$$

$$5 \times (-2) = -10$$

Les 2 nombres n'ont pas le même signe, le produit est négatif.

$$10 \div (-2) = -5$$

$$(-5) \times 2 = -10$$

Les 2 nombres n'ont pas le même signe, le produit est négatif.

$$(-10) \div 2 = -5$$

$$(-5) \times (-2) = +10$$

Les 2 nombres ont le même signe, le produit est positif.

$$(-10) \div (-2) = +5$$

### Propriété admise

Pour déterminer le signe d'une expression numérique dans laquelle n'interviennent que des multiplications et des divisions, il suffit de compter le nombre de facteurs négatifs.

Si ce nombre de facteurs négatifs est pair (0, 2, 4, 6, 8 ...), le produit est positif.

Si ce nombre de facteurs négatifs est impair (1, 3, 5, 7, 9...), le produit est négatif.

### Exemples

$2 \times 5 \times (-4) \times 3 \times (-4) \times (-4) \times 5$  est négatif car il y a un nombre impair (3) de facteurs négatifs.

$2 \times (-5) \times (-4) \times 3 \times (-4) \times (-4) \times 5$  est positif car il y a un nombre pair (4) de facteurs négatifs.

### Remarque

Peu importe le nombre de facteurs positifs ou s'il y a plus de facteurs positifs que négatifs ; seul compte le nombre de facteurs négatifs.



ATTENTION, la propriété précédente ne "marche" que s'il y a des multiplications et des divisions. Il ne faut surtout pas l'utiliser lorsqu'il y a des additions ou des soustractions.

### Propriété priorités opératoires admise

Pour calculer une expression numérique, on procède selon l'ordre suivant :

1. On calcule l'intérieur des parenthèses. Si des parenthèses sont imbriquées (l'une dans l'autre), on commence par celles qui sont le plus à l'intérieur.
2. On effectue les multiplications et divisions (de gauche à droite).
3. On termine toujours par les additions et soustractions (de gauche à droite).

### Exemple

$$10 + 5 \times (3 - (3 + 5 \times 7)) = 10 + 5 \times (3 - (3 + 35)) = 10 + 5 \times (3 - (38)) = 10 + 5 \times (-35) = 10 + (-175) = -165$$

### Astuce

Dans le cas de parenthèses imbriquées, il peut être utile de mettre en couleur les paires de parenthèses pour repérer les calculs à effectuer.

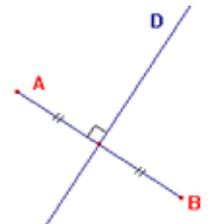
  <a href="https://www.lesmathsdherve.net/rel/atifs-parcours-differencies/">https://www.lesmathsdherve.net/rel/atifs-parcours-differencies/</a>	  <a href="https://www.lesmathsdherve.net/rel/atifs-videos/">https://www.lesmathsdherve.net/rel/atifs-videos/</a>	  <a href="https://www.lesmathsdherve.net/rel/atifs-aides/">https://www.lesmathsdherve.net/rel/atifs-aides/</a>	  <a href="https://www.lesmathsdherve.net/rel/atifs-carte-mentale/">https://www.lesmathsdherve.net/rel/atifs-carte-mentale/</a>
---	---	---	---

# SYMETRIES axiales et centrales, TRANSLATIONS

## I – Symétrie axiale

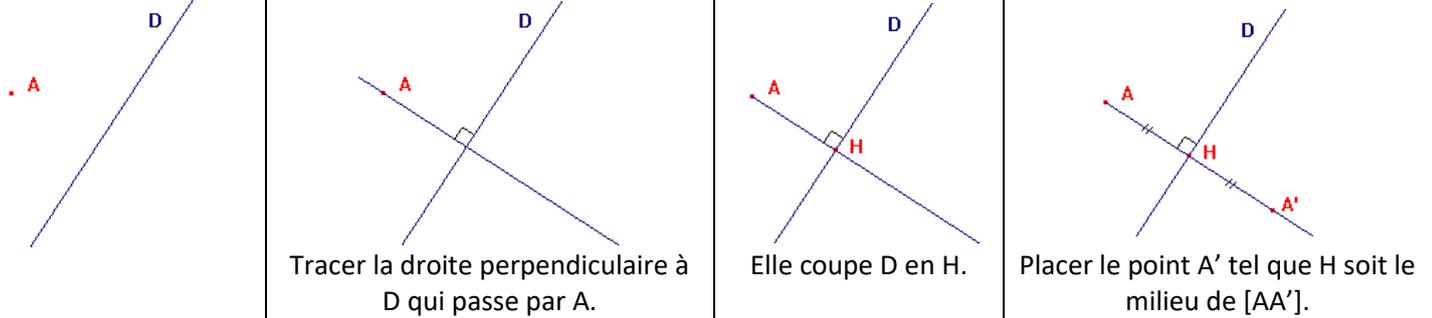
### Définition

Deux points A et B sont symétriques par rapport à la droite D si D est la médiatrice de [AB].



### Construction avec la réquerre

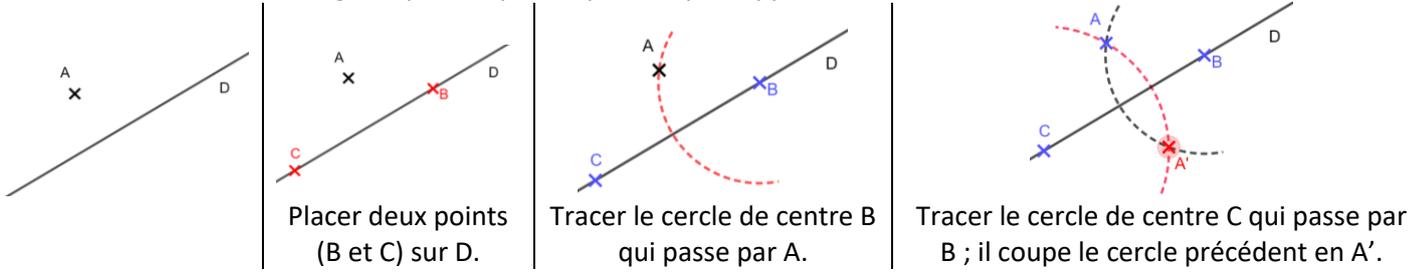
Pour construire l'image du point A par la symétrie par rapport à la droite D il faut :



A' est le symétrique de A par la symétrie d'axe D.  
On dit aussi que A' est l'image de A par la symétrie d'axe D.

### Construction avec le compas et la règle non graduée

Pour construire l'image du point A par la symétrie par rapport à la droite D il faut :



### Propriété admise

La symétrie axiale conserve les angles, les distances, les surfaces, les formes ...

### Remarque

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

Pour construire la figure ci-contre, j'ai :

1. Tracer l'image A' de A
2. Tracer l'image B' de B
3. Construis le carré A'B'C'D'.
4. Tracer la diagonale [A'C']
5. Placer son milieu O'.
6. Tracer le segment [B'O'].
7. Placer le point M' au milieu de [A'B'].
8. Tracer le demi-cercle de diamètre [A'B'] à l'extérieur du carré.

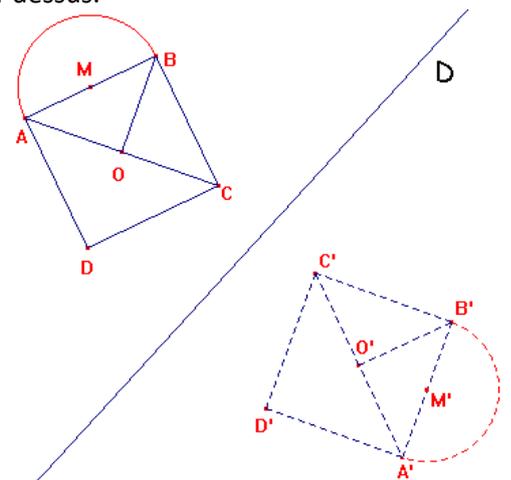


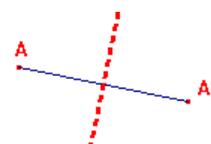
Image par la symétrie d'axe D

### Pour mémoire

La symétrie axiale « correspond » à un miroir.

### Caractériser

Pour caractériser une symétrie axiale, il faut donner son axe.  
Pour retrouver son axe, il suffit de connaître un point et son image.  
L'axe de symétrie est la médiatrice du segment formé par ces 2 points.



## II – Symétrie centrale

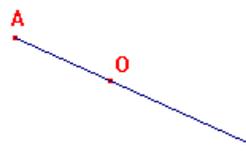
### Définition

Deux points A et B sont symétriques par rapport au point O si O est le milieu de [AB].



### Construction

Pour construire l'image du point A par la symétrie par rapport au point O il faut :



Tracer la demi-droite [AO).



Placer le point A' sur [AO) tel que O soit le milieu de [AA'].

A' est le *symétrique* de A par la symétrie de centre O.

On dit aussi que A' est l'*image* de A par la symétrie de centre O.

### Propriété admise

La symétrie centrale conserve les angles, les distances, les surfaces, les formes ...

### Remarque

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

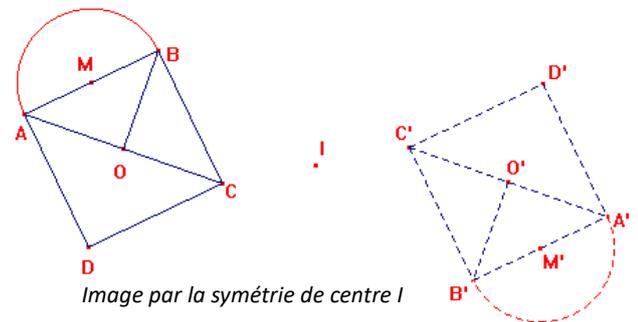


Image par la symétrie de centre I

### Pour mémoire

La symétrie centrale « correspond » à un demi-tour autour du centre de symétrie.

### Caractériser

Pour caractériser une symétrie centrale, il faut donner son centre.

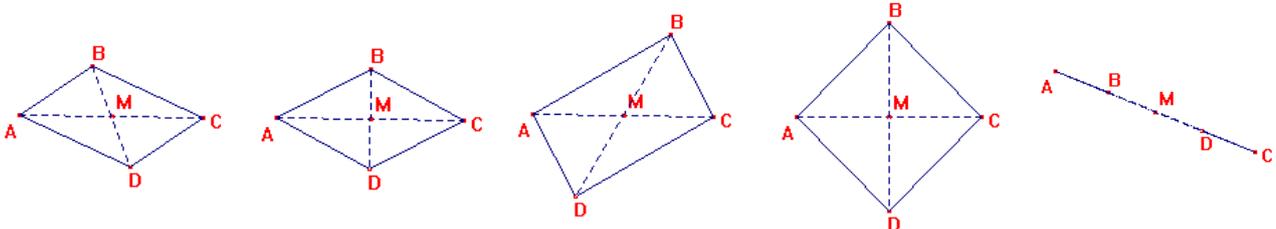
Pour retrouver son centre, il suffit de connaître un point et son image. Le centre de symétrie est le milieu du segment formé par ces 2 points.



## III – Translation

### Définition

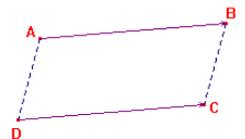
ABCD est un *parallélogramme* si ces diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu.



Dans tous les cas ci-dessus, ABCD est un parallélogramme car M est le milieu des diagonales [AC] et [BD].

### Définition

On dit que l'image du point D est le point C par la *translation* qui envoie A sur B si ABCD est un parallélogramme.



### Construction

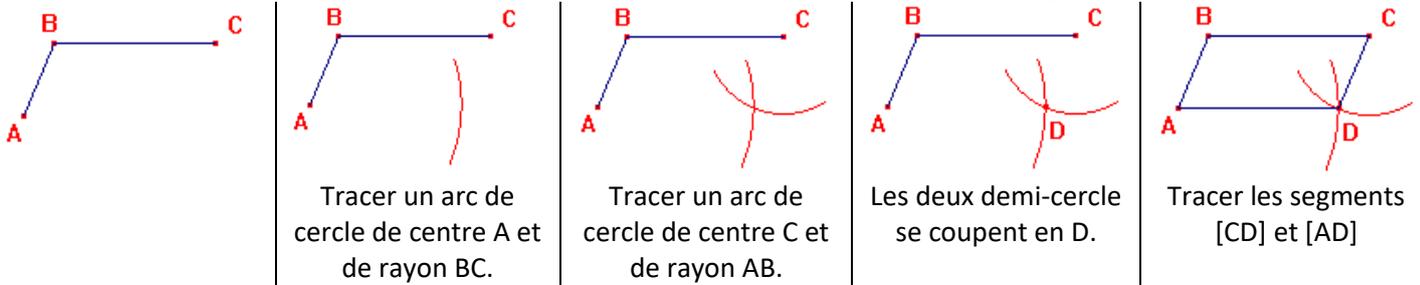
Pour construire l'image du point C dans la translation qui envoie A sur B il faut construire le parallélogramme ABC'C.

C' est le *translaté* de C par la translation qui envoie A sur B.

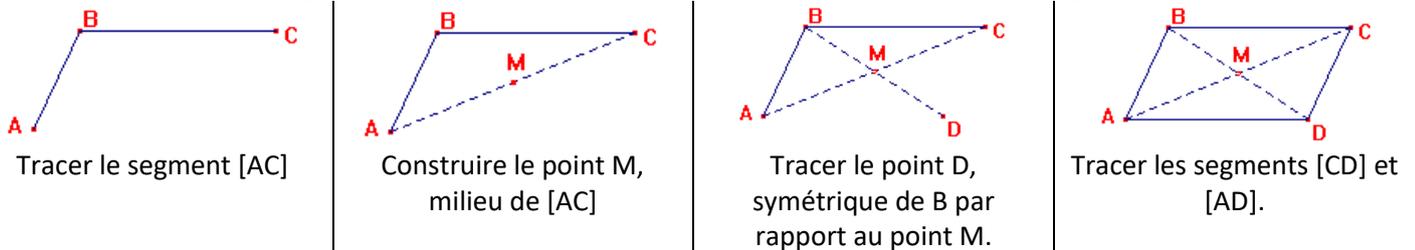
On dit aussi que C' est l'*image* de C par la translation qui envoie A sur B.



**Construction** d'un parallélogramme (lorsque l'on en donne 3 sommets A, B et C) avec règle et compas



**Construction** d'un parallélogramme (lorsque l'on en donne 3 sommets A, B et C) avec règle graduée



**Propriété** admise

La translation conserve les angles, les distances, les surfaces, les formes ...

**Remarque**

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

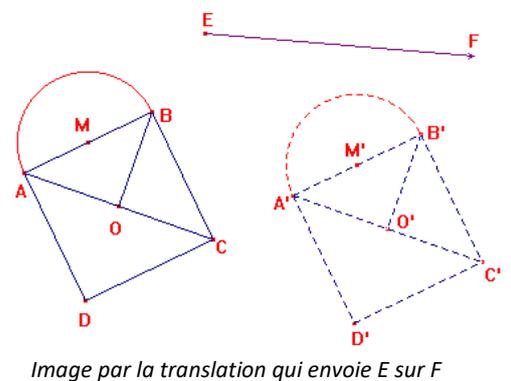
**Pour mémoire**

La translation « correspond » à un glissement sans tourner.

**Caractériser**

Pour caractériser une translation, il faut donner un point et son image ou le vecteur dont les extrémités sont ces points.

Dans l'exemple, on peut parler de la translation qui envoie A sur B ou de la translation associée au vecteur  $\overrightarrow{AB}$ . On peut aussi parler de la translation qui envoie C sur C' ou de la translation associée au vecteur  $\overrightarrow{CC'}$ .



PARCOURS DIFFÉRENCIÉS

<https://www.lesmathsdherve.net/translations-parcours-differencies/>

MATHS

<https://www.lesmathsdherve.net/translations-videos/>

<https://www.lesmathsdherve.net/translations-aides/>

VIVE LES MATHS

<https://www.lesmathsdherve.net/translations-carte-mentale/>

# FRACTIONS : additions et soustractions

## Définitions

Un nombre en *écriture fractionnaire* s'écrit sous la forme :

$$\frac{a}{b} \leftarrow \begin{array}{l} \text{le numérateur} \\ \text{le dénominateur} \end{array}$$

On parle de *fraction* lorsque l'on a une écriture fractionnaire qui a un numérateur et un dénominateur entiers.

On parle de *fraction décimale* lorsque l'on a une fraction dont le dénominateur est 10, 100, 1000, 10000 ...

## Propriété d'égalité de fractions - admise

Deux fractions sont égales, si pour passer de l'une à l'autre, on multiplie (ou on divise) le numérateur et le dénominateur de la première par un même nombre non nul afin d'obtenir le numérateur et le dénominateur de la deuxième :

$$\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}$$

## Exemples

$$\frac{3 \times 7}{5 \times 7} = \frac{21}{35} \quad \frac{3 \times 8}{7 \times 8} = \frac{24}{56} \quad \frac{45 \div 5}{25 \div 5} = \frac{9}{5}$$

## Définitions

*Simplifier* une fraction, c'est écrire une fraction égale à la première telle que la distance à zéro de son numérateur (et de son dénominateur) soit plus petite.

## Exemples

$$\frac{36 \div 2}{48 \div 2} = \frac{18 \div 2}{24 \div 2} = \frac{9 \div 3}{12 \div 3} = \frac{3}{4} \quad \frac{45 \div 3}{60 \div 3} = \frac{15 \div 5}{20 \div 5} = \frac{3}{4}$$

## Remarque

Dans les calculs, il faut toujours simplifier (le plus possible) les résultats obtenus.

## Propriétés admises : Critères de divisibilité

Un nombre entier est divisible par 2 s'il est pair (il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8).

- 186 se divise par 2 car il est pair (il se termine par 6).
- 187 ne se divise pas par 2 car il est impair.

Un nombre entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

- 237 est divisible par 3 car  $2+3+7=12$  et 12 est divisible par 3.
- 238 n'est pas divisible par 3 car  $2+3+8=13$  et 13 n'est pas divisible par 3.

Un nombre entier est divisible par 4 si le nombre formé par ses 2 derniers chiffres est divisible par 4.

- 25 292 est divisible par 4 car 92 est divisible par 4, car  $92=40+40+12$  et 12 est divisible par 4.
- 45 267 n'est pas divisible par 4 car 67 n'est pas divisible par 4, car  $67=40+27$  et 27 n'est pas divisible par 4.

Un nombre entier est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou par 5.

- 185 se divise par 5 car il se termine par 5.
- 190 se divise par 5 car il se termine par 0.
- 187 ne se divise pas par 5.

Un nombre entier est divisible par 6 s'il est divisible par 2 ET par 3, donc s'il est pair ET si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

- 894 se divise par 6 car
  - il se divise par 2 (il est pair),
  - ET il se divise par 3 car  $8+9+4=21$  qui se divise par 3.
- 165 ne se divise pas par 6 car
  - il ne se divise pas par 2 (il est impair),
  - même si il se divise par 3 car  $1+6+5 = 12$  qui se divise par 3.
- 898 ne se divise pas par 6 car
  - il se divise par 2 (il est pair),
  - mais il ne se divise pas par 3 car  $8+9+8=25$  qui ne se pas divise par 3.
- 77 ne se pas divise par 6 car
  - il ne se divise pas par 2 (il est impair),
  - il ne se divise pas par 3 car  $7+7=14$  qui ne se divise pas par 3.

Un nombre entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

- 567 est divisible par 9 car  $5+6+7=18$  et 18 est divisible par 9.
- 123 456 789 est divisible par 9 car  $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$  et 45 est divisible par 9 car  $4+5=9$  qui est divisible par 9.
- 238 n'est pas divisible par 9 car  $2+3+8=13$  et 13 n'est pas divisible par 9.

### Remarque

Un nombre divisible par 9 est obligatoirement divisible par 3.

### Définition

Un nombre est dit premier s'il n'a que 1 et lui-même comme diviseur (un nombre premier a exactement 2 diviseurs).

### Exemples

Le nombre 3 est premier car ses diviseurs sont 1 et 3.

Le nombre 6 n'est pas premier car il se divise par 1, 2, 3 et 6.

Le nombre 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur.

**Astuce** pour trouver tous les nombres premiers en partant de 2 : **crible d'Ératosthène** (c'est un astronome, géographe, philosophe et mathématicien grec : -276 à -194).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On écrit tous les nombres de 1 à 100.

1 n'est pas premier donc on le barre

Le premier nombre non barré est 2 donc c'est un nombre premier.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On barre tous les multiples de 2 qui ne sont donc pas premiers.

Le premier nombre non barré après 2 est 3 ; c'est un nombre premier.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On barre tous les multiples de 3 qui ne sont donc pas premiers.

Le premier nombre non barré après 3 est 5 ; c'est un nombre premier.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On barre tous les multiples de 5 qui ne sont donc pas premiers.

Le premier nombre non barré après 5 est 7 ; c'est un nombre premier.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

On barre tous les multiples de 7 qui ne sont donc pas premiers.

Le premier nombre non barré après 7 est 11 ; c'est un nombre premier.

On s'arrête ici car  $11^2 = 11 \times 11 > 100$ .

Tous les nombres non barrés sont premiers.

Les nombres premiers jusqu'à 100 sont : ♥ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97.

### Comment décomposer un nombre en produits de facteurs premiers.

On veut décomposer 450.

450		On réécrit le nombre à gauche de la ligne verticale
225	2	2 est le plus petit nombre premier qui divise 450 $450 = 2 \times 225$ On écrit 225 à gauche et 2 à droite
75	3	3 est le plus petit nombre premier qui divise 225 $225 = 3 \times 75$ On écrit 75 à gauche et 3 à droite
25	3	3 est le plus petit nombre premier qui divise 75 $75 = 3 \times 25$
5	5	5 est le plus petit nombre premier qui divise 25 $25 = 5 \times 5$
1	5	5 est le plus petit nombre premier qui divise 5 $5 = 1 \times 5$ On s'arrête lorsqu'il y a 1 dans la colonne de gauche.

$$450 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5^2$$

### Exemples de décomposition en facteurs premiers

<p>Décomposons 180</p> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">180</td><td style="padding: 5px;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">90</td><td style="padding: 5px;">2</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">45</td><td style="padding: 5px;">2</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">15</td><td style="padding: 5px;">3</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">5</td><td style="padding: 5px;">3</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">1</td><td style="padding: 5px;">5</td></tr> </table> <p><math>180 = 2^2 \times 3^2 \times 5</math></p>	180		90	2	45	2	15	3	5	3	1	5	<p>Décomposons 380</p> <table style="border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">380</td><td style="padding: 5px;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">190</td><td style="padding: 5px;">2</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">95</td><td style="padding: 5px;">2</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">19</td><td style="padding: 5px;">5</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">1</td><td style="padding: 5px;">19</td></tr> </table> <p><math>380 = 2^2 \times 5 \times 19</math></p>	380		190	2	95	2	19	5	1	19
180																							
90	2																						
45	2																						
15	3																						
5	3																						
1	5																						
380																							
190	2																						
95	2																						
19	5																						
1	19																						

### Utilisation de la calculatrice

Décomposons 180

CASIO FX92					TI COLLEGE PLUS			
1	8	0	EXE	SECONDE	+	180	SECONDE	► SIMP

On obtient :  $2^2 \times 3^2 \times 5$

### Exemple de simplification de fraction

Simplifier la fraction  $\frac{21000}{29700}$

Décomposons 21000

21000	
10500	2
5250	2
2625	2
875	3
175	5
35	5
7	5
1	7

Décomposons 29700

29700	
14850	2
7425	2
2475	3
825	3
275	3
55	5
11	5
1	11

$$21000 = 2^3 \times 3 \times 5^3 \times 7 \quad 29700 = 2^2 \times 3^3 \times 5^2 \times 11$$

$$\frac{21000}{29700} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 7}{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 11} = \frac{2 \times 5 \times 7}{3 \times 3 \times 11} = \frac{70}{99}$$

### Comment transformer une écriture fractionnaire en fraction ?

On utilise la règle d'égalité des fractions pour obtenir un numérateur et un dénominateur entiers (on peut multiplier par 10, 100, 1000, 10000, ...).

Il peut être nécessaire de simplifier la fraction

### Exemples

$$\frac{5,2}{2} = \frac{5,2 \times 10}{2 \times 10} = \frac{52 \div 2}{20 \div 2} = \frac{26 \div 2}{10 \div 2} = \frac{13}{5} \quad \frac{4,51}{3,7} = \frac{4,51 \times 100}{3,7 \times 100} = \frac{451}{370}$$

### Propriété d'addition de fractions de même dénominateur - admise

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d} \quad \text{et} \quad \frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d}$$

### Exemples

$$\frac{3}{4} + \frac{6}{4} = \frac{3+6}{4} = \frac{9}{4} \quad \frac{1}{3} - \frac{8}{3} = \frac{1-8}{3} = \frac{-7}{3} \quad \frac{-1}{5} - \frac{8}{5} = \frac{-9}{5} \quad \frac{-15}{6} - \frac{-8}{6} = \frac{-15 - (-8)}{6} = \frac{-15+8}{6} = \frac{-7}{6}$$

### Définition

Mettre deux fractions au même dénominateur, c'est se "débrouiller" (en utilisant la propriété d'égalité de fractions) pour que les deux fractions aient le même dénominateur.

### Remarque

Un dénominateur commun peut être le produit des dénominateurs.

### Comment additionner deux fractions de dénominateurs différents ?

On se "débrouille" pour les mettre au même dénominateur puis on utilise la propriété d'addition ci-dessus.

### Exemples

$$\frac{7}{2} + \frac{5}{3} = \frac{7 \times 3}{2 \times 3} + \frac{5 \times 2}{3 \times 2} = \frac{21}{6} + \frac{10}{6} = \frac{31}{6} \quad \frac{5}{34} + \frac{8}{51} = \frac{5 \times 51}{34 \times 51} + \frac{8 \times 34}{51 \times 34} = \frac{255}{1734} + \frac{272}{1734} = \frac{527}{1734}$$

### Remarque

Cette méthode "marche" très bien, mais il faut penser à simplifier les fractions. Ici,  $\frac{527}{1734} = \frac{31}{102}$ .

### Astuce

Pour chercher un dénominateur commun, on cherche un multiple commun aux deux dénominateurs (ici 34 et 51).

Pour cela, on décompose les deux nombres.

Décomposons 34

34	
17	2
1	17

$$34 = 2 \times 17$$

Décomposons 51

51	
17	3
1	17

$$51 = 3 \times 17$$

On cherche un nombre qui contient tous les facteurs ci-dessus :

$$2 \times 3 \times 17 = 102.$$

$$\frac{5}{34} + \frac{8}{51} = \frac{5 \times 3}{34 \times 3} + \frac{8 \times 2}{51 \times 2} = \frac{15}{102} + \frac{16}{102} = \frac{31}{102}$$

**Propriété admise**

Prendre une quantité d'une fraction c'est multiplier le nombre par la fraction.

**Exemples**

Prendre  $\frac{3}{4}$  de 126 € c'est prendre  $\frac{3}{4} \times 126$  €.

Rouler  $\frac{2}{5}$  de 800 km c'est rouler  $\frac{2}{5} \times 800$  km.

**Remarque**

Le mot « de » en français se traduit par «  $\times$  » en mathématiques.

**Comment multiplier un nombre par une fraction ?**

Méthode 1	Méthode 2	Méthode 3
$\frac{a}{b} \times c = (a \div b) \times c$	$\frac{a}{b} \times c = (a \times c) \div b$	$\frac{a}{b} \times c = a \times (c \div b)$
$\frac{12}{6} \times 7 = (12 \div 6) \times 7 = 2 \times 7 = 14$	$\frac{2}{3} \times 9 = (2 \times 9) \div 3 = 18 \div 3 = 6$	$\frac{5}{7} \times 21 = 5 \times (21 \div 7) = 5 \times 3 = 15$

**Notation**

La fraction  $\frac{p}{100}$  est notée  $p\%$

La fraction  $\frac{15}{100}$  est notée  $15\%$

**Exemple de problème**

Sébastien achète un pull. Le prix affiché est de 65€, mais il bénéficie d'une remise de 15%.

Combien va-t-il payer ?

Calculons le montant de la remise

$$15\% \text{ de } 65 \text{ €} = \frac{15}{100} \text{ de } 65$$

$$= \frac{15}{100} \times 65 = (15 \times 65) \div 100 = 975 \div 100 = 9,75$$

La remise est de 9,75 €.

Je calcule le prix réduit.

$$65 - 9,75 = 55,25$$

Le prix réduit est de 55,25 €.

  <a href="https://www.lesmathsdherve.net/fractions-parcours-differencies-2/">https://www.lesmathsdherve.net/fractions-parcours-differencies-2/</a>	  <a href="https://www.lesmathsdherve.net/fractions-videos-2/">https://www.lesmathsdherve.net/fractions-videos-2/</a>	  <a href="https://www.lesmathsdherve.net/fractions-aides/">https://www.lesmathsdherve.net/fractions-aides/</a>	  <a href="https://www.lesmathsdherve.net/fractions-carte-mentale/">https://www.lesmathsdherve.net/fractions-carte-mentale/</a>
---	---	---	---

# PROPORTIONNALITE, VITESSES et ECHELLES

## I – Proportionnalité

### Définition

Deux séries de valeurs sont dites *proportionnelles* si pour passer de l'une à l'autre on multiplie toujours par un même nombre appelé le *coefficient de proportionnalité*.

### Exemple

Volume de sans plomb 95 (E10) en litres	15	23	12
Prix en €	22,80	34,96	18,24

↓ × 1,52

### Propriété admise

$$a \times \frac{b}{a} = b$$

Pour passer du nombre a au nombre b, on multiplie par  $\frac{b}{a}$ .

$$a \xrightarrow{\times \frac{b}{a}} b \quad \text{départ} \xrightarrow{\times \frac{\text{arrivée}}{\text{départ}}} \text{arrivée}$$

### Exemples

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \times \frac{645}{5} & & \\
 & & & & \text{ou} & & \\
 & & & & \times 129 & & \\
 \times 3 & & \times 13 & & & \times \frac{7}{5} & \times \frac{3}{7} \\
 5 \rightarrow 15 & 5 \rightarrow 65 & 5 \rightarrow 645 & 5 \rightarrow 7 & 7 \rightarrow 3
 \end{array}$$

### Comment déterminer si un tableau correspond à une situation de proportionnalité ?

- 1°) On calcule, séparément, les quotients qui permettent de passer d'une valeur à la valeur correspondante.
- 2°) Si les quotients sont tous égaux, c'est une situation de proportionnalité.  
Sinon, cela ne l'est pas.

### Exemple 1

Masse de fraises en kg	3	5	7
Prix en €	5,10	8,50	11,90

Pour passer de 3 à 5,1 on multiplie par  $\frac{5,1}{3} = 1,7$

Pour passer de 5 à 8,5 on multiplie par  $\frac{8,5}{5} = 1,7$

Pour passer de 7 à 11,9 on multiplie par  $\frac{11,9}{7} = 1,7$

C'est bien une situation de proportionnalité de coefficient 1,7.

### Exemple 2

Masse de poires en kg	3	5	7
Prix en €	4,80	8,00	11,00

$$\frac{4,80}{3} = 1,6 \quad \frac{8,00}{5} = 1,6 \quad \frac{11,00}{7} \approx 1,57$$

Ce n'est pas une situation de proportionnalité.

### Exemple 3

9	15	18
12	20	24

$$\frac{12}{9} = \frac{4}{3} \quad \frac{20}{15} = \frac{4}{3} \quad \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$$

C'est une situation de proportionnalité.

**Propriété des produits en croix** - admise

Si  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  alors  $a \times d = b \times c$

Si  $a \times d = b \times c$  alors  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

**Exemple 1**

On veut comparer les fractions  $\frac{65}{91}$  et  $\frac{115}{161}$

On calcule séparément les produits en croix :

$$65 \times 161 = 10\,465$$

$$\text{et } 91 \times 115 = 10\,465$$

donc  $65 \times 161 = 91 \times 115$  donc  $\frac{65}{91} = \frac{115}{161}$

**Exemple 2**

On veut comparer les fractions  $\frac{7}{13}$  et  $\frac{9}{17}$

On calcule séparément les produits en croix :

$$7 \times 17 = 119$$

$$\text{et } 13 \times 9 = 117$$

donc  $7 \times 17 \neq 13 \times 9$  donc  $\frac{7}{13} \neq \frac{9}{17}$

**Exemple 3**

Trouve le nombre manquant  $\frac{5}{4} = \frac{7}{?}$

Les fractions sont égales donc les produits en croix sont égaux

$$5 \times ? = 4 \times 7 \quad \text{On effectue les produits en croix}$$

$$5 \times ? = 28 \quad \text{On simplifie chaque membre}$$

$$? = 5,6 \quad \text{On divise par 5}$$

**Astuce**

S'il n'y a qu'une valeur inconnue, on multiplie les deux quantités qui « touchent » celle qu'on cherche puis on divise le résultat par la quantité qui est « en face ».

**Exemple 4**

$$\frac{5}{4} = \frac{7}{a}$$

$$a = \frac{4 \times 7}{5} = 5,6$$

$$\frac{5}{4} = \frac{b}{3}$$

$$b = \frac{3 \times 5}{4} = 3,75$$

$$\frac{c}{4} = \frac{7}{2}$$

$$c = \frac{4 \times 7}{2} = 14$$

$$\frac{5}{d} = \frac{7}{3}$$

$$d = \frac{5 \times 3}{7} = \frac{15}{7}$$

**Exemple 5**

Trouve le nombre manquant  $\frac{6}{4} = \frac{5+a}{a}$

Les fractions sont égales donc les produits en croix sont égaux

$$6 \times a = 4 \times (5 + a) \quad \text{On effectue les produits en croix}$$

$$6a = 20 + 4a \quad \text{On simplifie chaque membre}$$

$$-4a \quad -4a$$

$$2a = 20 \quad \text{On isole les inconnues dans un membre}$$

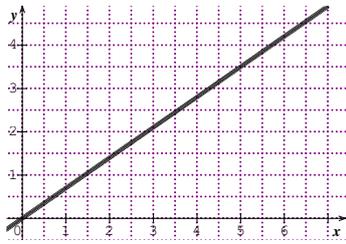
$$a = 10 \quad \text{On divise les deux membres par 2}$$

**Propriété** – admise

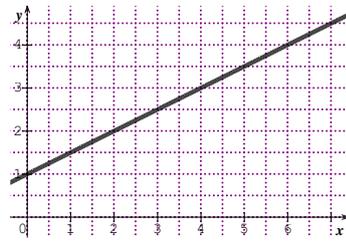
La représentation graphique d'une situation de proportionnalité est

- une droite
- qui passe par l'origine du repère

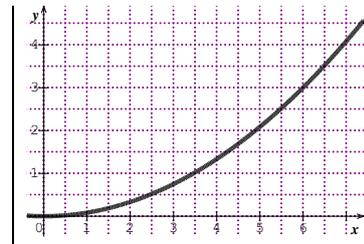
## Exemples



Une droite qui passe par l'origine  
Situation de proportionnalité



Une droite qui ne passe pas par l'origine  
Pas une situation de proportionnalité



Pas une droite

## II – Vitesse, distance et temps



$$3,4\text{h} \neq 3\text{h } 40\text{ min}$$

$$3,4\text{ h} = 3\text{h} + 0,40\text{h} = 3\text{h } 24\text{min}$$

$$\times 60$$

$$3\text{h } 18\text{min} \neq 3,18\text{h}$$

$$3\text{h } 18\text{ min} = 3\text{h} + 0,30\text{h} = 3,3\text{h}$$

$$\div 60$$

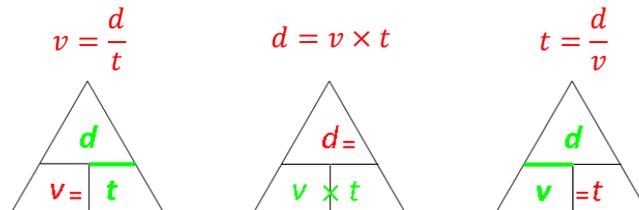
### Conversion avec la calculatrice

CASIO FX92	Texas Instruments
3,15 [EXE] [0.] [0.] [0.]	3,15 [2nde] [π] [→DMS] [entrer]
3,15 h = 3h 9min	

CASIO FX92	Texas Instruments
3 [0.] [0.] [12] [0.] [0.] [EXE] [0.] [0.] [0.]	3 [2nde] [π] [°] 12 [2nde] [π] ['] [entrer]
3h 12min = 3,2h	

### Propriétés admises

Si  $d$  est la distance,  $t$  le temps et  $v$  la vitesse moyenne on a alors



### Exemple 1 : recherche de la vitesse moyenne

Clément roule pendant 3h et parcourt 183km. Quelle est sa vitesse moyenne ?

Calculons sa vitesse moyenne

Méthode 1

$$v = \frac{d}{t} = \frac{183}{3} = 61$$

Méthode 2

Distance	Temps
183 km	3h
?	1h

↓ ÷3

$$? = \frac{183 \times 1}{3} = 61$$

Sa vitesse moyenne est de 61 km/h.

### Remarque

Deux nombres  $a$  et  $b$  sont dans le **ratio** 2 : 3 si  $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$  | Trois nombres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sont dans le **ratio** 2 : 3 : 7 si  $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{7}$

### Exemple

$$\frac{2}{3} = \frac{10}{15} = \frac{8}{12} \text{ donc } 2, 10 \text{ et } 8 \text{ sont dans le ratio } 3 : 15 : 12$$

$$\frac{10}{12} = \frac{5}{6} = \frac{15}{18} \text{ donc } 10, 5 \text{ et } 15 \text{ sont dans le ratio } 12 : 6 : 18$$

**Exemple 2 : recherche de la distance parcourue**

Mathieu roule pendant 3h à 43 km/h de moyenne. Quelle est la distance parcourue ?

Calculons la distance parcourue

Méthode 1

$$d = v \times t = 43 \times 3 = 129$$

Méthode 2

Distance	Temps
43 km	1h
?	3h

↓ ×3

$$? = \frac{43 \times 3}{1} = 129$$

La distance parcourue est **129 km**.

**Exemple 3 : recherche du temps de parcours**

Pauline marche pendant 12km à la vitesse moyenne de 4,5 km/h. Quel est le temps de parcours ?

Calculons le temps de parcours

Méthode 1

$$t = \frac{d}{v} = \frac{12}{4,5} = \frac{8}{3}$$

Méthode 2

Distance	Temps
4,5 km	1h
12 km	?

→ ÷ 4,5

$$? = 12 \div 4,5 = \frac{8}{3}$$

Le temps de parcours est de  $\frac{8}{3}$ h = **2h 40min**.

**Exemple 4 : conversions de vitesse**

Convertir 135 km/h en m/s

Distance	Temps
135 km	1 h
=	=
135 000 m	3 600 s
?	1 s

↓ ÷ 3 600

$$? = 135\ 000 \div 3\ 600 = 37,5$$

$$135\ \text{km/h} = 37,5\ \text{m/s}$$

Convertir 15 m/s en km/h

Distance	Temps
15 m	1 s
? m	3 600 s
=	=
? km	1h

↓ × 3600

$$? = 15 \times 3600 = 54\ 000\ \text{m} = 54\ \text{km}$$

$$15\ \text{m/s} = 54\ \text{km/h}$$

### III – Echelles

#### Remarque

Pour représenter la réalité, il peut être nécessaire de l'agrandir ou de la réduire.  
S'il s'agit d'un agrandissement, on multiplie les distances par un nombre supérieur à 1.  
S'il s'agit d'une réduction, on multiplie les distances par un nombre entre 0 et 1.

#### Réduction

En bas à gauche, il est indiqué que l'échelle est de 1 : 10 000 ; on devrait écrire  $\frac{1}{10\,000}$ .

Cela signifie que pour passer de la réalité à la carte, on a multiplié les distances par  $\frac{1}{10\,000}$ .

Par exemple, si on cherche les points à 350 m de l'entrée du collège, on doit chercher la distance correspondante sur la carte, on calcule :

$$350 \times \frac{1}{10\,000} = 0,0350$$

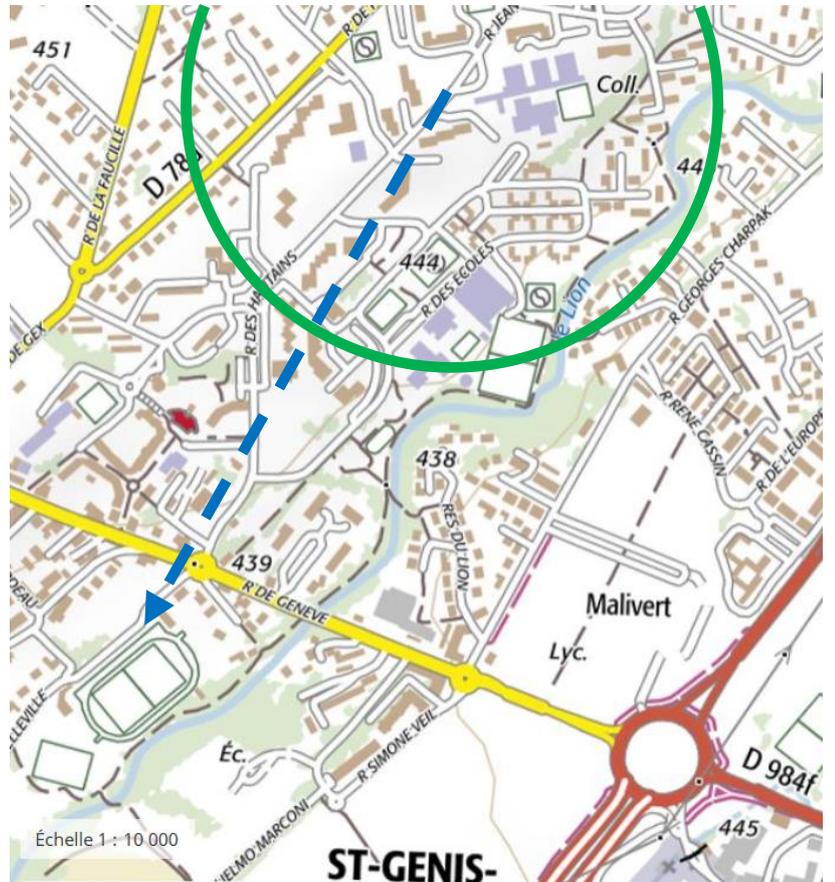
Sur la carte, cela correspond à 0,035 m = 3,5 cm  
Ce sont donc tous les points sur le cercle vert.

L'échelle  $\frac{1}{10\,000}$  signifie aussi que 1 cm sur la carte représente 10 00 cm = 100 m de la réalité.  
On aurait aussi pu la trouver avec un tableau de proportionnalité en utilisant 350 m = 35 000 cm

Carte	Réalité
1 cm	10 000 cm
?	35 000 cm

$$? = \frac{1 \times 35\,000}{10\,000} = 3,5$$

On retrouve le rayon de 3,5 cm.



www.geoportail.fr

Pour aller de l'entrée du collège au stade, il y a 8 cm (la flèche bleue pointillée). On peut déterminer la distance entre le collège et le stade :

Carte	Réalité
1 cm	10 000 cm
8 cm	?

$$? = \frac{8 \times 10\,000}{1} = 80\,000$$

Il y a 80 000 cm = 800 m pour aller du collège au stade.

## Agrandissement

L'échelle est ici de  $\frac{20}{1}$ . Cela signifie que pour passer de la réalité à la photo, on a multiplié les distances par  $\frac{20}{1}$ .

Cela signifie aussi que 20 cm sur la photo représentent 1 cm dans la réalité.

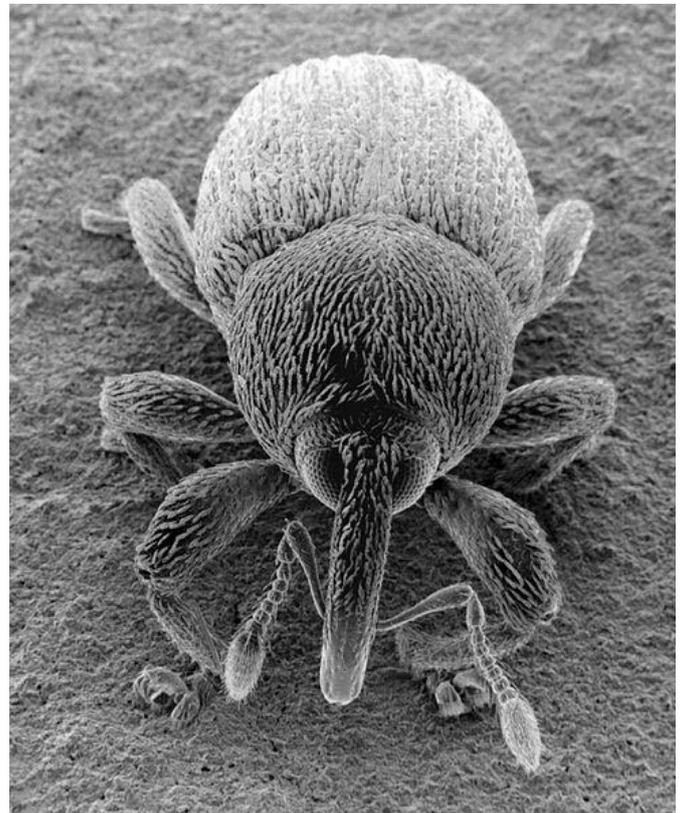
Pour connaître sa taille réelle, on la mesure sur la photo ; on trouve ici 8,6 cm.

Je calcule sa taille réelle :

Photo	Réauté
20 cm	1 cm
8,6 cm	?

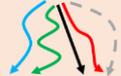
$$? = \frac{8,6 \times 1}{20} = 0,43$$

La taille est donc de 0,43 cm = 4,3 mm.



Un curculionidé (insecte phytophage). Image Louisa Howard - Dartmouth Electron Microscope Facility.

PARCOURS  
DIFFÉRENCIÉS



<https://www.lesmathsdherve.net/proportionnalite-parcours-differencies/>



<https://www.lesmathsdherve.net/proportionnalite-videos/>



<https://www.lesmathsdherve.net/proportionnalite-aide/>



<https://www.lesmathsdherve.net/proportionnalite-carte-mentale/>

# CALCUL LITTÉRAL

## I – L'utilisation de lettres dans les calculs

### Histoire

Le calcul littéral (calcul avec des lettres) appelé aussi calcul algébrique, du mot algèbre, est un puissant outil développé par le mathématicien français François Viète (1540 – 1603) qui a attribué une lettre à des quantités inconnues dans des calculs, mais aussi à des coefficients.

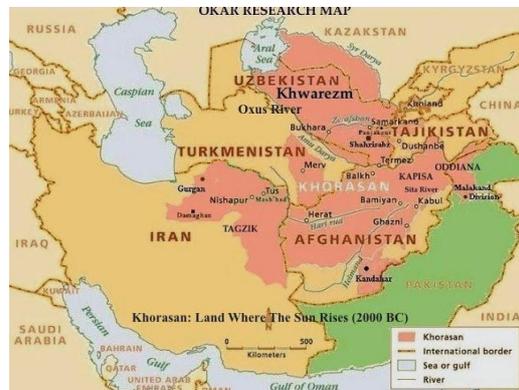
L'aire d'un carré est  $A = c \times c$  ; le périmètre d'un cercle est  $P = \pi \times d$ .

L'usage de la lettre X remonte à René Descartes. Mais l'idée de donner un nom à l'inconnue d'un problème est plus ancienne encore, puisqu'elle vient du mathématicien grec Diophante III<sup>e</sup> siècle, qui l'appelait « arithmos », le nombre. Plus tard, le mathématicien perse Al-Kwarizmi IX<sup>e</sup> siècle la nomma « shay », la chose en arabe. Ce mot est plus connu en français populaire dans sa forme plurielle chouïa, "un chouïa" signifiant "un peu".

Cette pratique parvint en France grâce aux Espagnols, qui transcrivaient ce mot en « xay ». Descartes simplifia en ne gardant que l'initiale, d'où « X ». Son usage s'étendit ensuite, en particulier au monde judiciaire.

Al-Khwarizmi, (latinisé en Algoritmi ou Algorizmi), né dans les années 780, probablement à Khiva dans la région du Khwarezm (d'où il prend son nom), dans l'actuel Ouzbékistan, mort vers 850 à Bagdad, est un mathématicien, géographe, astrologue et astronome perse, membre de la Maison de la sagesse de Bagdad. Ses écrits, rédigés en langue arabe, puis traduits en latin à partir du XII<sup>e</sup> siècle, ont permis l'introduction de l'algèbre en Europe. Sa vie s'est déroulée en totalité à l'époque de la dynastie abbasside.

Son nom latinisé est à l'origine du mot algorithme et le titre de l'un de ses ouvrages (Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison) est à l'origine du mot algèbre. L'utilisation des chiffres arabes et leur diffusion dans le Moyen-Orient et en Europe sont dues à un autre de ses livres nommé Traité du système de numération des Indiens qui fut diffusé via la langue arabe dans tout l'empire abbasside. Al-Khwarizmi a classifié les algorithmes existants, en particulier selon leurs critères de terminaison, mais ne revendique pas leur invention : l'algorithme le plus connu du monde est celui d'Euclide et les premiers algorithmes connus le furent, sans surprise, dans un pays devant gérer des calculs élaborés de l'impôt : à Babylone.



### ⚠ Attention

Il faut prêter une attention toute particulière à la graphie de la lettre  $x$  pour ne pas la confondre avec le signe de multiplication  $\times$ .

### Remarque calcul de $5 \times (x + 3)$

Géométrique	" Répétitif "	Avec la simple distributivité
<p><math>5 \times (x + 3) = 5x + 15</math></p>	$5 \times (x + 3) = x + 3$ $+ x + 3$ $= 5 \times x + 5 \times 3$ $= 5x + 15$	$5 \times (x + 3) = 5 \times x + 5 \times 3 = 5x + 15$

### Propriété simple distributivité - admise

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

### Exemples de distribution

$$5 \times (2x + 7) = 10x + 35 \quad 8 \times (x - 3) = 8x - 24 \quad -6 \times (x + 7) = -6x - 42 \quad -4 \times (x - 7) = -4x + 28$$

### Remarque sur la réduction des produits

On peut toujours réduire les produits.

$$2x \times 3x = 6x^2 \quad -5 \times 3x = -15x \quad 3x \times 7y = 21xy$$

### Remarque sur la réduction de sommes

$$3x + 2x = 5x \quad 15x - 8x = 7x \quad 4x - 12x = -8x \quad 15x^2 - 8x^2 = 7x^2 \quad 33x - 5x^2 + 7x + 11x^2 = 40x + 6x^2$$

$5x^2 + 3x$  ne peut pas se réduire

### Remarque

Dans tous les exercices, il faudra réduire les expressions (même si cela n'est pas indiqué dans l'énoncé).

### Remarque gestion du signe « - »

$$-(2x + 7) = -2x - 7 \quad -(x - 3) = -x + 3 \quad -(-3x + 7) = +3x - 7 \quad -(-6x - 7) = +6x + 7$$

## Exemples complexes

$$3(x+5) + 7(x+4) = 3x + 15 + 7x + 28 = 10x + 43$$

$$6(x-4) - 9(x+2) = 6x - 24 - 9x - 18 = -3x - 42$$

$$5(x+7) + 8(x-3) = 5x + 35 + 8x - 24 = 13x + 11$$

$$6(x-7) + 9x(3x-2) = 6x - 42 + 27x^2 - 18x = 27x^2 - 12x - 42$$

## Propriété double distributivité

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

### Démonstration

$$(a+b)(c+d) = (a+b) \times c + (a+b) \times d = ac + ad + bc + bd$$

	c	d
a	ac	ad
b	bc	bd

## Exemples

$$(x+3)(x+7) = x^2 + 7x + 3x + 21 = x^2 + 10x + 21$$

$$(x+5)(x-4) = x^2 - 4x + 5x - 20 = x^2 + x - 20$$

$$(x-4)(x-6) = x^2 - 6x - 4x + 24 = x^2 - 10x + 24$$

$$(x+2)(x+3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$$

$$(x-8)(x+3) = x^2 + 3x - 8x - 24 = x^2 - 5x - 24$$

$$(2x+3)(3x+7) = 6x^2 + 14x + 9x + 21 = 6x^2 + 23x + 21$$

## Exemples complexes

$$(x+5)(x+4) + (x+2)(x+9) = x^2 + 4x + 5x + 20 + x^2 + 9x + 2x + 18 = 2x^2 + 20x + 38$$

$$(x+5)(x-4) + (x-2)(x-9) = x^2 - 4x + 5x - 20 + x^2 - 9x - 2x + 18 = 2x^2 - 10x - 2$$

$$(x+3)(x-2) + 5(x-6)(x+7) = x^2 - 2x + 3x - 6 + 5(x^2 + 7x - 6x - 42) = x^2 + x - 6 + 5x^2 + 35x - 42x - 210 = 6x^2 - 6x - 216$$

$$(x-2)(x-3) - (x-5)(x+4) = x^2 - 3x - 2x + 6 - (x^2 + 4x - 5x - 20) = x^2 - 3x - 2x + 6 - x^2 - 4x + 5x + 20 = -4x + 26$$

$$(2x+7)(3x-4) - 8(x+2)(x-5) = 6x^2 - 8x + 21x - 28 - 8(x^2 - 5x + 2x - 10) = 6x^2 - 8x + 21x - 28 - 8x^2 + 40x - 16x + 80 = -2x^2 + 37x + 52$$

## II – Equations

### Histoire

Dans l'Antiquité, vers -2000 avant JC, les Babyloniens savaient déjà résoudre des problèmes par équations, mais leur résolution n'a rien à voir avec les techniques actuelles. On le sait grâce à un célèbre document conservé au British Muséum à Londres, le Papyrus Rhind, qui date de -1650.

Le Papyrus Rhind a été écrit par un scribe égyptien nommé Ahmès. Son nom vient de l'Écossais Henry Rhind qui l'acheta en 1858 à Louxor. Il aurait été découvert sur le site de la ville de Thèbes, en Egypte. Actuellement conservé au British Museum (Londres), il contient 87 problèmes résolus d'arithmétique, d'algèbre, de géométrie et d'arpentage, sur plus de 5 m de longueur et 32 cm de large. Ahmès indique que son papyrus est, en partie, une copie de résultats plus anciens (vers -2000) remontant aux Babyloniens.

« J'ai une pierre mais je ne l'ai pas pesée. Après avoir enlevé un septième de son poids, j'ai pesé le tout et j'ai trouvé 1 ma-na (unité de masse). Quel était le poids de la pierre à l'origine ? ».

### Définition

Une équation

$$5x + 5 = 3x - 17$$

Membre de gauche      Membre de droite

### Remarque

Lorsque l'on a une équation, le signe d'égalité ne signifie pas que les deux membres sont identiques et sont deux écritures différentes d'une même expression algébrique.

Le signe d'égalité signifie que pour certaines valeurs numériques données aux inconnues, les deux membres seront égaux.

## Définition

On dit qu'un nombre est *une solution* d'une équation l'égalité entre les deux membres est vraie lorsqu'on remplace l'inconnue par ce nombre.

## Exemples

Pour l'équation  $5x + 5 = 3x - 17$ , tester si 2 et -11 sont des solutions.

Méthode « littéraire »	Méthode en ligne	Méthode en colonne
Lorsque $x = 2$ alors <ul style="list-style-type: none"> <li>le membre de gauche devient <math>5 \times 2 + 5 = 15</math></li> <li>et le membre de droite devient <math>3 \times 2 - 17 = -11</math></li> </ul> Donc <b>2 n'est pas une solution.</b>	Si $x = 2$ alors $5x + 5 = 5 \times 2 + 5 = 15$ et $3x - 17 = 3 \times 2 - 17 = -11$ Donc <b>2 n'est pas une solution.</b>	Si $x = 2$ alors $\begin{array}{l l} 5x + 5 & 3x - 17 \\ = 5 \times 2 + 5 & = 3 \times 2 - 17 \\ = 15 & = -11 \end{array}$ Donc <b>2 n'est pas une solution.</b>
Méthode « littéraire »	Méthode en ligne	Méthode en colonne
Lorsque $x = -11$ alors <ul style="list-style-type: none"> <li>le membre de gauche devient <math>5 \times (-11) + 5 = -50</math></li> <li>et le membre de droite devient <math>3 \times (-11) - 17 = -50</math></li> </ul> Donc <b>-11 est une solution.</b>	Si $x = -11$ alors $5x + 5 = 5 \times (-11) + 5 = -50$ et $3x - 17 = 3 \times (-11) - 17 = -50$ Donc <b>-11 est une solution.</b>	Si $x = -11$ alors $\begin{array}{l l} 5x + 5 & 3x - 17 \\ = 5 \times (-11) + 5 & = 3 \times (-11) - 17 \\ = -50 & = -50 \end{array}$ Donc <b>-11 est une solution.</b>

## Définition

Résoudre une équation c'est trouver toutes les solutions.

## Exemples

Equation n'ayant pas de solution	Equation ayant une seule solution	Equation ayant une infinité de solution
$2x + 3 = 2x + 5$	$5x + 5 = 3x - 17$	$2(x + 5) - 2 = 2x + 8$
On ne peut pas trouver de valeur numérique pour laquelle l'égalité serait vraie. On peut tester tous les nombres, il n'y a pas de solution.	La solution de cette équation est -11.	On peut tester toutes les autres valeurs, l'égalité ne serait pas vraie. Quelle que soit la valeur numérique par laquelle on remplace $x$ , l'égalité sera vraie.

## Remarque

Dans les exercices de collège, (presque toutes) les équations auront une solution unique.

## Propriété - admise

On ne change pas les solutions d'une équation si :

- On additionne (ou soustrait), une même expression aux deux membres de l'équation.
- On multiplie (ou divise) les deux membres de l'équation par une même expression NON NULLE.

## Exemples d'application de la propriété

$x + 5 = 8$  $-5 \quad -5$ On veut faire disparaître +5 ; il faut faire -5 dans les deux membres.  $x = 3$  La solution est <b>3</b> .	$x + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$  $-\frac{1}{3} \quad -\frac{1}{3}$ On veut faire disparaître $+\frac{1}{3}$ ; il faut faire $-\frac{1}{3}$ dans les deux membres.  $x = \frac{1}{6}$  La solution est $\frac{1}{6}$ .
$x - 7 = 4$  $+7 \quad +7$ On veut faire disparaître -7 ; il faut faire +7 dans les deux membres.  $x = 11$  La solution est <b>11</b> .	$x - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$  $+\frac{1}{4} \quad +\frac{1}{4}$ On veut faire disparaître $-\frac{1}{4}$ ; il faut faire $+\frac{1}{4}$ dans les deux membres.  $x = \frac{3}{4}$  La solution est $\frac{3}{4}$ .
$3x = 12$  $\div 3 \quad \div 3$ On veut faire disparaître le 3 devant le $x$ donc le $\times 3$ devant le $x$ ; il faut diviser les deux membres par 3.  $x = 4$  La solution est <b>4</b> .	$-7x = 42$  $\div (-7) \quad \div (-7)$ On veut faire disparaître le -7 devant le $x$ donc le $\times (-7)$ devant le $x$ ; il faut diviser les deux membres par -7.  $x = -6$  La solution est <b>-6</b> .

$$\frac{x}{5} = 2$$

$\times 5 \quad \times 5$

On veut faire disparaître la division par 5 ;  
il faut faire  $\times 5$  dans les deux membres.

$$x = 10$$

La solution est **10**.

$$\frac{x}{-3} = 7$$

$\times(-3) \quad \times(-3)$

On veut faire disparaître la division par (-7) ;  
il faut faire  $\times(-7)$  dans les deux membres.

$$x = -21$$

La solution est **-21**.

### Exemple de résolution d'une équation

Résoudre l'équation  $2(x + 5) = 6x + 7$ .

$2(x + 5) = 6x + 7$	On réécrit l'équation
$2x + 10 = 6x + 7$	On simplifie l'écriture de chacun des membres en développant et réduisant
$\begin{array}{r} -6x \quad -10 \quad -6x \quad -10 \\ -4x \quad = \quad -3 \end{array}$	On isole les inconnues dans un membre et les nombres dans l'autre en utilisant le point 1 de la propriété ci-dessus.
$\begin{array}{r} \div (-4) \quad \quad \quad \div (-4) \\ x \quad = \quad 0,75 \end{array}$	Pour trouver $x$ , on divise par le nombre devant $x$ en utilisant le point 2 de la propriété ci-dessus.
Si $x = 0,75$ alors $\begin{array}{r l} 2(x + 5) & 6x + 7 \\ = 2 \times (0,75 + 5) & = 6 \times 0,75 + 7 \\ = 11,5 & = 11,5 \end{array}$	On teste si le nombre trouvé est bien une solution de l'équation en remplaçant dans l'équation du départ.
La solution de l'équation est <b>0,75</b> .	On conclue par une phrase.

En contrôle, il faut écrire tout ce qui est en noir (la colonne de gauche) ci-dessus.

## III – Problèmes

### Exemple 1

Dans la cour de la ferme, il n'y a que des poules et des lapins. J'ai compté 174 têtes et 400 pattes. Combien y a-t-il d'animaux de chaque sorte ?

Soit L le nombre de lapins.	Expliciter l'inconnue. C'est souvent la question qui nous indique quelle inconnue choisir.												
<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>Lapins</th> <th>Poules</th> <th>Total</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Têtes</td> <td>L</td> <td>174 - L</td> <td>174</td> </tr> <tr> <td>Pattes</td> <td>4 × L</td> <td>2 × (174 - L)</td> <td>400</td> </tr> </tbody> </table>		Lapins	Poules	Total	Têtes	L	174 - L	174	Pattes	4 × L	2 × (174 - L)	400	Ecrire l'équation
	Lapins	Poules	Total										
Têtes	L	174 - L	174										
Pattes	4 × L	2 × (174 - L)	400										
$4 \times L + 2 \times (174 - L) = 400$ $4L + 348 - 2L = 400$ $2L + 348 = 400$ $\begin{array}{r} -348 \quad -348 \\ 2L \quad = \quad 52 \end{array}$ $\begin{array}{r} \div 2 \quad \quad \quad \div 2 \\ L \quad = \quad 26 \end{array}$	Résoudre l'équation												
Il y a <b>26 lapins</b> et $174 - 26 =$ <b>148 poules</b> .	Interpréter le résultat												
Vérification : Têtes : $26 + 148 = 174$ Pattes : $4 \times 26 + 2 \times 148 = 400$ C'est bon	Vérifier sur les données du problème												




<https://www.lesmathsdherve.net/calcul-litteral-parcours-differencies/>




<https://www.lesmathsdherve.net/calcul-litteral-videos/>




<https://www.lesmathsdherve.net/calcul-litteral-aide/>




<https://www.lesmathsdherve.net/calcul-litteral-carte-mentale/v>

### Exemple 2

Jules à 8 ans et son père a 42 ans.  
 Dans combien de temps l'âge du père sera-t-il le triple de celui de son fils ?

Soit  $x$  le nombre d'années à attendre.

	Jules	Père
Aujourd'hui	8	42
Dans $x$ années	$8 + x$	$42 + x$

$$\begin{aligned} \text{Père} &= 3 \times \text{Jules} \\ 42 + x &= 3 \times (8 + x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 42 + x &= 24 + 3x \\ -24 \quad -x \quad -24 \quad -x & \\ 18 &= 2x \\ \div 2 \quad \quad \quad \div 2 & \\ 9 &= x \end{aligned}$$

Il faut attendre **9 ans**.

Vérification : dans 9 ans  
 Jules :  $8 + 9 = 17$  ans  
 Père :  $42 + 9 = 51$  ans  
 $3 \times 17 = 51$   
*C'est bon*

### Exemple 4

Marina et Karima pensent au même nombre.  
 Marina ajoute 8 et multiplie le résultat par 3.  
 Karima multiplie le résultat par 5 et ajoute 6.  
 Curieusement, elles trouvent le même résultat.  
 A quel nombre ont-elles pensé au départ ?

Soit  $x$  le nombre pensé au départ.

	Marina	Karima
Départ	$x$	$x$
Après calcul	$3 \times (x + 8)$	$5 \times x + 6$

$$3 \times (x + 8) = 5 \times x + 6$$

$$\begin{aligned} 3x + 24 &= 5x + 6 \\ -3x \quad -6 \quad -3x \quad -6 & \\ 18 &= 2x \\ \div 2 \quad \div 2 & \\ 9 &= x \end{aligned}$$

Elles ont pensé au nombre **9**.

Vérification :  
 Marina :  $9 \rightarrow 9 + 8 = 17 \rightarrow 17 \times 3 = 51$   
 Karima :  $9 \rightarrow 9 \times 5 = 45 \rightarrow 45 + 6 = 51$   
*C'est bon*

### Exemple 3

Un kilogramme de poire coûte un euro de plus qu'un kilogramme de pommes.  
 Marion a acheté trois kilos de pommes et cinq kilos de poires.  
 Elle a payé vingt-cinq euros.  
 Quel est le prix d'un kilo de pommes ? de poires ?

Soit  $x$  le prix d'un kilogramme de pommes.

	Pommes	Poires	Total
Quantité en kg	3	5	
Prix au kg	$x$	$x + 1$	
Prix à payer	$3 \times x$	$5 \times (x + 1)$	25

$$3 \times x + 5 \times (x + 1) = 25$$

$$\begin{aligned} 3x + 5x + 5 &= 25 \\ 8x + 5 &= 25 \\ -5 \quad -5 & \\ 8x &= 20 \\ \div 8 \quad \quad \div 8 & \\ x &= 2,5 \end{aligned}$$

Les pommes coûtent **2,5 €** au kilo  
 et les poires coûtent  $2,5 + 1 = \mathbf{3,5 €}$  au kilo.

Vérification :  
 Pommes :  $3 \times 2,5 = 7,5$   
 Poires :  $5 \times 3,5 = 17,5$   
 Total :  $7,5 + 17,5 = 25$   
*C'est bon*

### Exemple 5

Kassandra et Arthur ont le même nombre de billes.  
 Si Arthur donne 10 billes à Kassandra, elle en aura alors deux fois plus que lui.  
 Combien ont-ils de billes au départ ?

Soit  $x$  le nombre de billes au départ.

	Kassandra	Arthur
Départ	$x$	$x$
Après calcul	$x + 10$	$x - 10$

$$\text{Kassandra} = 2 \times \text{Arthur}$$

$$x + 10 = 2 \times (x - 10)$$

$$\begin{aligned} x + 10 &= 2x - 20 \\ 30 &= x \end{aligned}$$

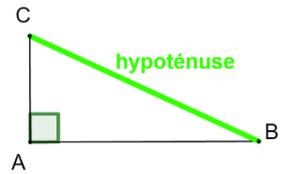
Ils avaient chacun **30 billes**.

Vérification :  
 Kassandra :  $30 \rightarrow 30 + 10 = 40$   
 Arthur :  $30 \rightarrow 30 - 10 = 20$   
 $2 \times 20 = 40$   
*C'est bon*

# Triangles rectangles : PYTHAGORE

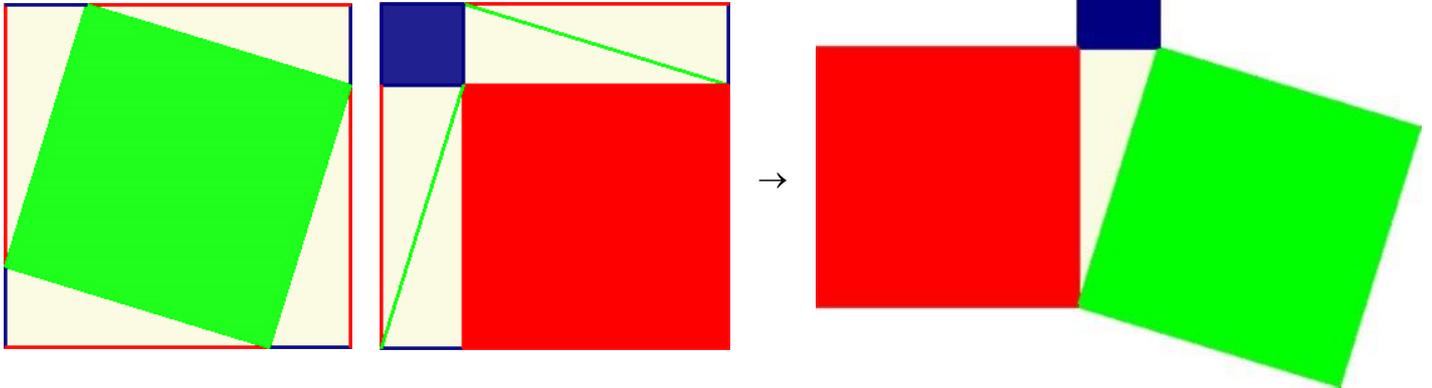
## Définition

Dans un triangle, le côté opposé à l'angle droit est appelé l'*hypoténuse*.



## Remarque

C'est le plus grand côté du triangle rectangle.



## Théorème de Pythagore admis

- Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.
- Si ABC un triangle rectangle en A, alors  $BC^2 = AB^2 + AC^2$ .

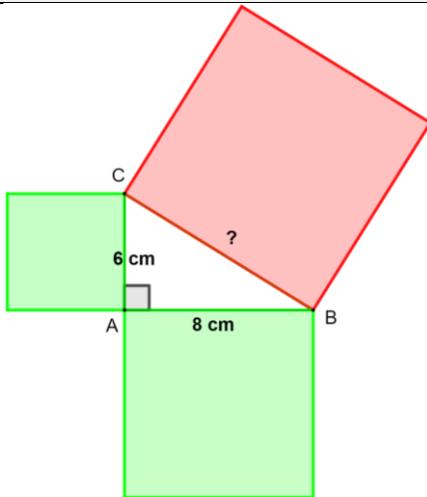
⚠ Cette propriété ne s'applique que dans les triangles rectangles.

## Exemples

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que

- $AB = 6 \text{ cm}$
- $AC = 8 \text{ cm}$

Calcule BC.



Dans ABC rectangle en A,  
d'après le théorème de Pythagore

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = 6^2 + 8^2$$

$$BC^2 = 36 + 64$$

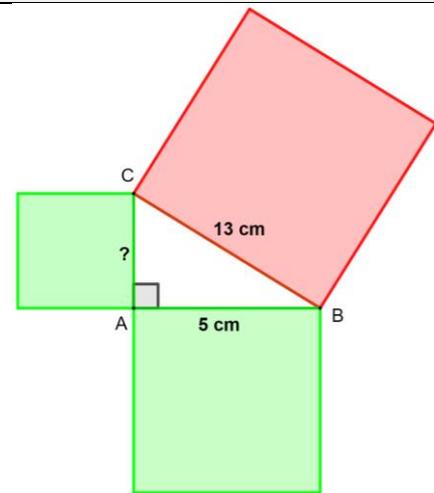
$$BC^2 = 100$$

$$BC = \sqrt{100} = \boxed{10 \text{ cm}}$$

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que

- $AB = 5 \text{ cm}$
- $BC = 13 \text{ cm}$

Calcule AC.



Dans ABC rectangle en A,  
d'après le théorème de Pythagore

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$13^2 = 5^2 + AC^2$$

$$169 = 25 + AC^2$$

$$- 25 \quad - 25$$

$$144 = AC^2$$

$$AC = \sqrt{144} = \boxed{12 \text{ cm}}$$

### Exemple avec valeur approchée

Soit ABC un triangle rectangle tel que  $AB = 4 \text{ cm}$  et  $AC = 5 \text{ cm}$ .

Calcule BC.

Dans ABC rectangle en A,

d'après le théorème de Pythagore

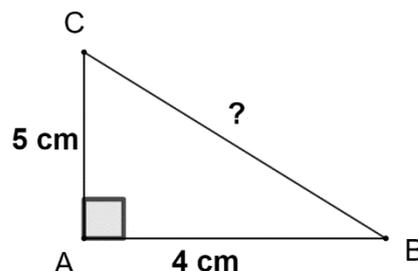
$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = 4^2 + 5^2$$

$$BC^2 = 16 + 25$$

$$BC^2 = 41$$

$$BC = \sqrt{41} \approx 6,4 \text{ cm}$$



Utilisation de la calculatrice

CASIO FX92	TI collègue
Pour calculer $6^2 + 8^2$ , je tape	
6 $\boxed{x^2}$ + 8 $\boxed{x^2}$ $\boxed{EXE}$	6 $\boxed{x^2}$ + 8 $\boxed{x^2}$ =
CASIO FX92	TI collègue
Pour calculer $\sqrt{100}$ , je tape	
$\boxed{SECONDE}$ $\boxed{x^2}$ 100 $\boxed{EXE}$	$\boxed{SECONDE}$ $\boxed{x^2}$ 100 =

### Propriété réciproque de Pythagore admise

- Dans un triangle, si le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle est rectangle.
- Soit ABC un triangle.  
Si  $BC^2 = AB^2 + AC^2$  alors le triangle est rectangle et [BC] est l'hypoténuse, le triangle est rectangle en A.

### Propriété contraposée de Pythagore admise

- Dans un triangle, si le carré du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle n'est pas rectangle.
- Soit ABC un triangle.  
Si [BC] est le plus grand côté et  $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$  alors le triangle n'est pas rectangle.

### Exemples

Prouver qu'un triangle est rectangle.	Prouver qu'un triangle n'est pas rectangle.
Soit ABC un triangle tel que $AB = 3 \text{ cm}$ , $BC = 4 \text{ cm}$ et $AC = 5 \text{ cm}$ .	Soit ABC un triangle tel que $AB = 5 \text{ cm}$ , $BC = 7 \text{ cm}$ et $AC = 6 \text{ cm}$ .
Quelle est la nature de ABC ?	Quelle est la nature de ABC ?
Si ABC était rectangle, l'hypoténuse serait [AC] car c'est le plus grand côté.	Si ABC était rectangle, l'hypoténuse serait [BC] car c'est le plus grand côté.
$\begin{array}{l l} AC^2 & AB^2 + BC^2 \\ = 5^2 & = 3^2 + 4^2 \\ = 25 & = 9 + 16 \\ & = 25 \end{array}$	$\begin{array}{l l} BC^2 & AB^2 + AC^2 \\ = 7^2 & = 5^2 + 6^2 \\ = 49 & = 25 + 36 \\ & = 61 \end{array}$
Donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc d'après la propriété réciproque de Pythagore, <b>ABC est rectangle en B</b> (car [AC] est l'hypoténuse).	Donc $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ d'après la contraposée de Pythagore alors <b>ABC n'est pas rectangle</b> .

<https://www.lesmathsdherve.net/pythagore-parcours-differencies/>

<https://www.lesmathsdherve.net/pythagore-videos/>

<https://www.lesmathsdherve.net/pythagore-aide/>

<https://www.lesmathsdherve.net/pythagore-carte-mentale/>

# FRACTIONS : multiplications et divisions

## Propriété du signe des fractions

Une fraction est une division, donc la règle des signes s'applique pour déterminer le signe d'une fraction (on compte le nombre de termes négatifs).

### Exemples

$$\frac{-3}{4} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4} = -\frac{-3}{-4} = -0,75$$

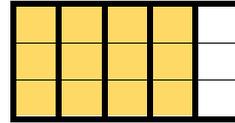
Il y a 1 (ou 3) terme(s) négatif(s), donc le résultat est négatif.

$$\frac{-3}{-4} = \frac{3}{4} = +0,75$$

Il y a 2 termes négatifs, donc le résultat est positif.

### Remarque

Quatre cinquièmes valent



Deux tiers de quatre cinquièmes valent huit quinzièmes



Deux tiers de quatre cinquièmes s'écrit  $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$  et on voit que  $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$

### Propriété de multiplication de fractions - admise

Pour multiplier deux fractions, il suffit de multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

### Astuce

Pour déterminer le signe, on utilise la règle des signes.

### Exemples

$$\frac{5}{7} \times \frac{9}{11} = \frac{5 \times 9}{7 \times 11} = \frac{45}{77}$$

$$\frac{-5}{3} \times \frac{-8}{-4} = -\frac{5 \times 8}{3 \times 4} = -\frac{40}{12} = -\frac{10}{3}$$

Il y a 3 termes négatifs, donc le résultat est négatif.



$$2 \times \frac{3}{5} \neq \frac{2 \times 3}{2 \times 5} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \quad \text{mais} \quad 2 \times \frac{3}{5} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{5} = \frac{2 \times 3}{1 \times 5} = \frac{6}{5}$$

### Définition

L'inverse d'un nombre a non nul est le nombre qui multiplié par a vaut 1. L'inverse de a est noté :  $a^{-1}$ .

### Exemples

- L'inverse de 2 est 0,5 car  $2 \times 0,5 = 1$
- L'inverse de 4 est 0,25 car  $4 \times 0,25 = 1$
- L'inverse de 0,8 est 1,25 car  $0,8 \times 1,25 = 1$

### Propriété

L'inverse du nombre a vaut  $\frac{1}{a}$ .

L'inverse de la fraction  $\frac{a}{b}$  vaut  $\frac{b}{a}$ .

### Démonstrations

$$a \times \frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = 1$$

### Exemples

Nombre	5	-3	$\frac{2}{7}$	$\frac{-3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	0
Inverse	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{4}$	N'existe pas



Ne pas confondre inverse et opposé.

L'opposé de 2 est -2

L'inverse de 2 est  $\frac{1}{2}$

### Définition

Diviser c'est multiplier par l'inverse.

### Exemples

$$\frac{3}{4} \div \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{21}{20}$$

$$\frac{-2}{3} \div \frac{5}{7} = -\frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = -\frac{14}{15}$$

$$\frac{7}{3} \div 2 = \frac{7}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$$

$$8 \div \frac{5}{7} = 8 \times \frac{7}{5} = \frac{56}{5}$$



On inverse uniquement le nombre se trouvant après le symbole de division et on ne change pas celui qui est avant.

### Application

Parcours bleu

Parcours rouge

### Remarques

$\frac{3}{5}$  est une notation de  $3 \div 5$  et vaut 0,6

Il n'est pas possible de donner une valeur décimale exacte pour toutes les fractions, par exemple :  $\frac{1}{3} \approx 0,33$



Attention à la position du signe d'égalité lorsqu'il y a des fractions à "étages".

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{4}} = \frac{2}{3} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \approx 2,67$$

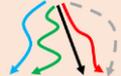
$$\frac{\frac{2}{3}}{4} = \frac{2}{3} \div 4 = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{12} \approx 0,17$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

### Exemple de calcul « complexe »

$$\frac{\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}}}{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}} = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) \div \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) \div \left(\frac{2}{4} - \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4} \div \frac{-1}{4} = \frac{5}{4} \times \frac{4}{-1} = \frac{20}{-4} = -5$$

PARCOURS DIFFÉRENCIÉS



<https://www.lesmathsdherve.net/fractions-parcours-differencies/>



<https://www.lesmathsdherve.net/fractions-videos/>



<https://www.lesmathsdherve.net/fractions-aides-2/>



<https://www.lesmathsdherve.net/fractions-cours/>

# Théorème de THALES, TRIANGLES SEMBLABLES, HOMOTHETIES

## I – Théorème de Thalès

**Rappel** admise

Pour passer du nombre a au nombre b, on multiplie par  $\frac{b}{a}$ .

$$a \xrightarrow{\times \frac{b}{a}} b \quad \text{départ} \xrightarrow{\times \frac{\text{arrivée}}{\text{départ}}} \text{arrivée}$$

**Exemples**

$$5 \xrightarrow{\times 3} 15 \quad 5 \xrightarrow{\times 13} 65 \quad 5 \xrightarrow{\begin{matrix} \times \frac{645}{5} \\ \text{ou} \\ \times 129 \end{matrix}} 645 \quad 5 \xrightarrow{\times \frac{7}{5}} 7 \quad 7 \xrightarrow{\times \frac{3}{7}} 3$$

**Comment** identifier que deux triangles sont homothétiques l'un de l'autre ?

Soit ABC un triangle.

Si  $D \in (AB)$  et  $E \in (AC)$  et  $(BC) \parallel (DE)$  alors ADE et ABC sont homothétiques l'un par rapport à l'autre.

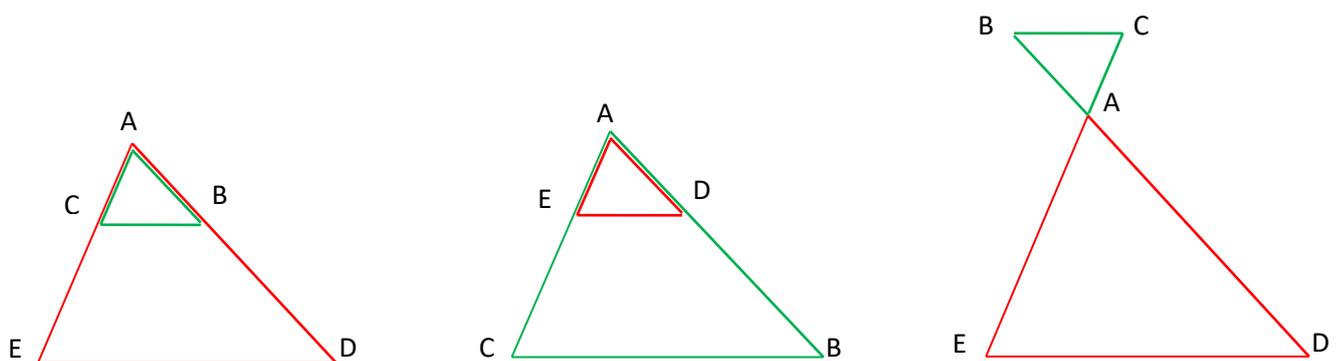
**Théorème de Thalès**

Soit ABC un triangle.

Si  $D \in (AB)$  et  $E \in (AC)$  tels que  $(BC) \parallel (DE)$  alors

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$



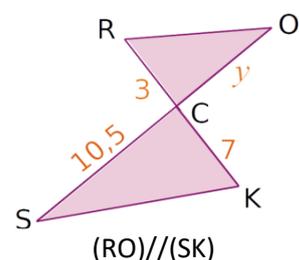
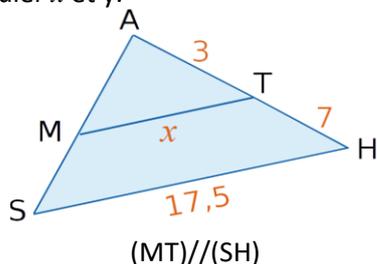
**"Démonstration"**

Les trois quotients intervenant dans le théorème sont les coefficients d'agrandissement/réduction permettant de passer de ABC à ADE.

**Exemples**

Sur les figures ci-dessous, les distances sont en centimètres.

Calculer x et y.



Comme A, T, H et A, M, S sont alignés et comme  $(MT) \parallel (HS)$ , d'après le théorème de Thalès

$$\frac{AT}{AH} = \frac{AM}{AS} = \frac{MT}{SH}$$

$$\frac{3}{10} = \frac{AM}{17,5} = \frac{x}{17,5}$$

$$x = \frac{3 \times 17,5}{10} = 5,25 \text{ cm}$$

Comme R, C, K et O, C, S sont alignés et comme  $(RO) \parallel (KS)$ , d'après le théorème de Thalès

$$\frac{CR}{CK} = \frac{CO}{CS} = \frac{RO}{SK}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{10,5}{7} = \frac{y}{7}$$

$$y = \frac{3 \times 10,5}{7} = 4,5 \text{ cm}$$

**Propriété réciproque de Thalès** - admise

Si A, B, D et A, C, E sont alignés dans cet ordre et si

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$$

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB}$$

alors (BC) // (DE)

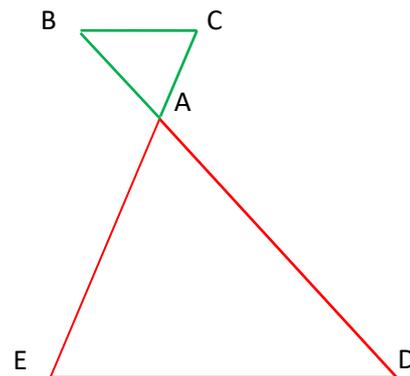
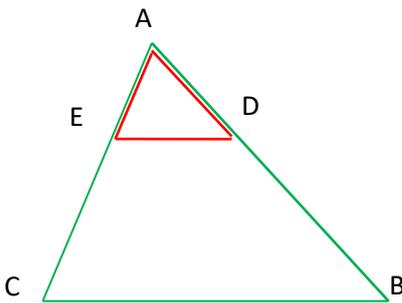
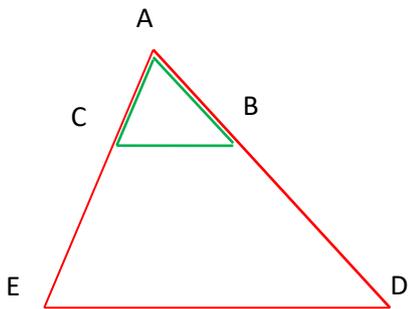
**Propriété contraposée de Thalès** - admise

Si A, B, D et A, C, E sont alignés dans cet ordre et si

$$\frac{AB}{AC} \neq \frac{AE}{AD}$$

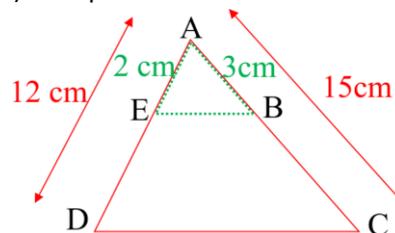
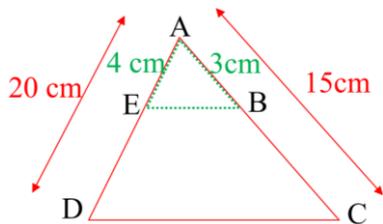
$$\frac{AD}{AE} \neq \frac{AC}{AB}$$

alors (BC) et (DE) ne sont pas parallèles



**Exemples**

On cherche à savoir si les droites (BE) et (CD) sont parallèles.



Si les droites (BE) et (CD) étaient parallèles, le théorème de Thalès donnerait  $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$ . On calcule séparément ces deux rapports

$$\frac{AB}{AC} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{AE}{AD} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

donc  $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$  et comme A, B, C et A, E, D sont alignés dans le même ordre, d'après la propriété réciproque de Thalès alors (BE) // (CD).

$$\frac{AB}{AC} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{AE}{AD} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

donc  $\frac{AB}{AC} \neq \frac{AE}{AD}$  et comme A, B, C et A, E, D sont alignés dans le même ordre, d'après la contraposée de Thalès alors (BE) et (CD) ne sont pas parallèles.

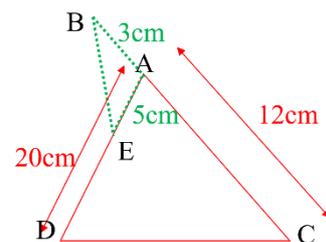
**Remarque**

La condition d'alignement dans le même ordre est indispensable.

On a :  $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

On a aussi :  $\frac{AE}{AD} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

Donc  $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$  et pourtant les droites (BE) et (CD) ne sont pas parallèles.



Soit B devrait appartenir à [AC], soit E devrait appartenir à [DA] sans appartenir à [DA].

PARCOURS DIFFÉRENCIÉS



<https://www.lesmathsdherve.net/thales-parcours-differencies/>



<https://www.lesmathsdherve.net/thales-videos/>



<https://www.lesmathsdherve.net/thales-aide/>

## II – Triangles semblables

### Définition

Deux triangles sont *semblables* s'ils ont la même forme, mais pas nécessairement la même taille.

### Propriété admise

Deux triangles sont semblables :

- si leurs côtés sont proportionnels
- ou
- s'ils ont les mêmes angles.

### Remarque

Pour passer entre deux triangles semblables, on peut effectuer une ou plusieurs transformations du plan vues au collège : symétrie axiale, symétrie centrale, translation, rotation ou homothétie.

### Exemple 1 : avec des angles

Dans le triangle ABC, on a

$$\widehat{A} = 180 - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180 - (102 + 49) = 29^\circ.$$

Dans le triangle A'B'C', on a

$$\widehat{B}' = 180 - (\widehat{A}' + \widehat{C}') = 180 - (49 + 29) = 102^\circ.$$

On a donc  $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$  et  $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$  et  $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$  donc les triangles ABC et A'B'C' sont semblables.

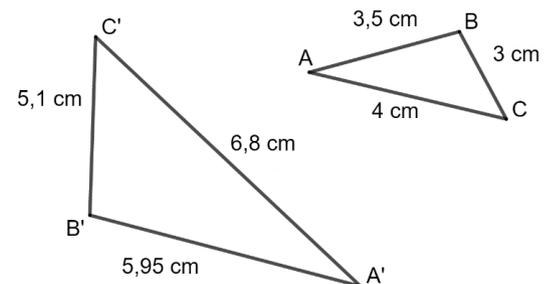
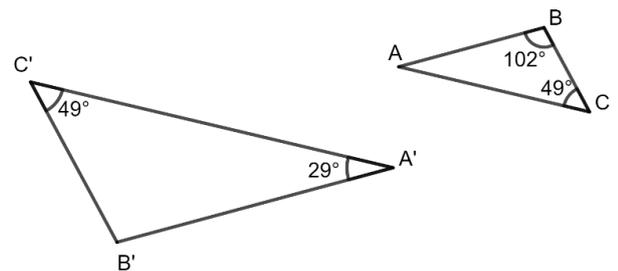
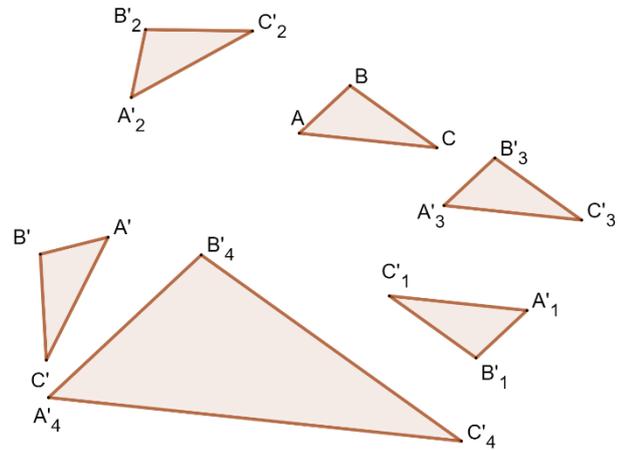
### Exemple 2 : avec des côtés proportionnels

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{5,95}{3,5} = 1,7$$

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{6,8}{4} = 1,7$$

$$\frac{C'B'}{CB} = \frac{5,1}{3} = 1,7$$

Donc  $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{C'B'}{CB}$  donc les triangles ABC et A'B'C' sont semblables.



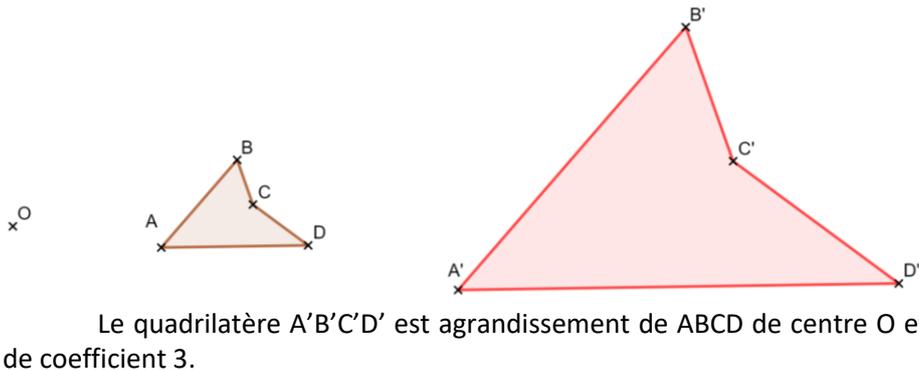
## III – Homothéties : agrandissement/réduction

### Définition

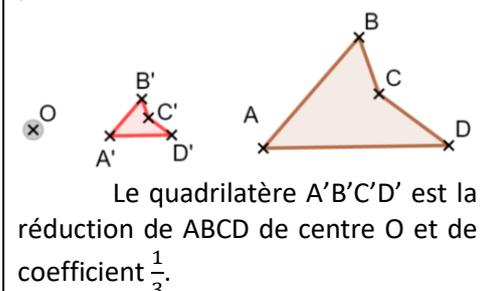
Le point A' est l'image du point A par l'*homothétie* de centre O et de coefficient k si :

- $A' \in (OA)$
- $OA' = k \times OA$

Si le coefficient est supérieur à 1, on parle d'*agrandissement*.



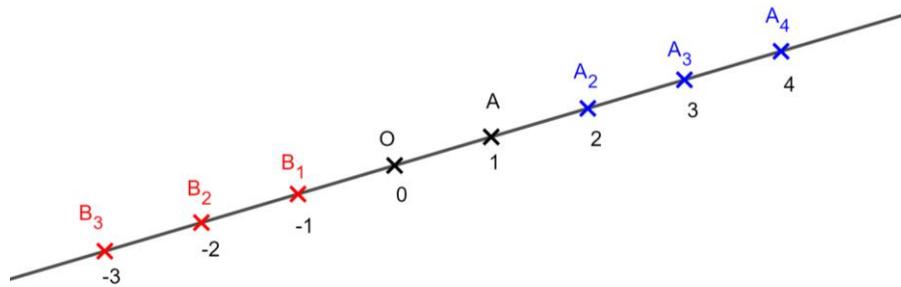
Si le coefficient est entre 0 et 1, on parle de *réduction*.



## Construction

Pour construire l'image du point A par l'homothétie de centre O et de rapport k, il faut :

- Si  $k > 0$ , tracer [OA) puis mesurer [OA) et placer A' sur [OA) tel que  $OA' = k \times OA$
- Si  $k < 0$ , tracer [AO) puis mesurer [OA) et placer A' sur [AO) tel que  $OA' = (\text{distance à zéro de } k) \times OA$



- $A_2$  est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 2
- $A_3$  est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 3
- $A_4$  est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 4
- $B_1$  est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -1
- $B_2$  est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -2
- $B_3$  est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -3

## Remarque

Une homothétie de rapport -1 est une symétrie centrale

## Propriété admise

L'homothétie conserve les angles, les formes mais pas les distances et les surfaces (cf. la propriété d'agrandissement réduction des solides, vue plus tard dans l'année).

## Remarque

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

Pour construire la figure ci-contre, j'ai :

1. Tracer l'image A' de A
2. Tracer l'image B' de B
3. Construis le carré A'B'C'D'.
4. Tracer la diagonale [A'C']
5. Placer son milieu E'.
6. Tracer le segment [B'E'].
7. Placer le point M' au milieu de [A'B'].
8. Tracer le demi-cercle de diamètre [A'B'] à l'extérieur du carré.

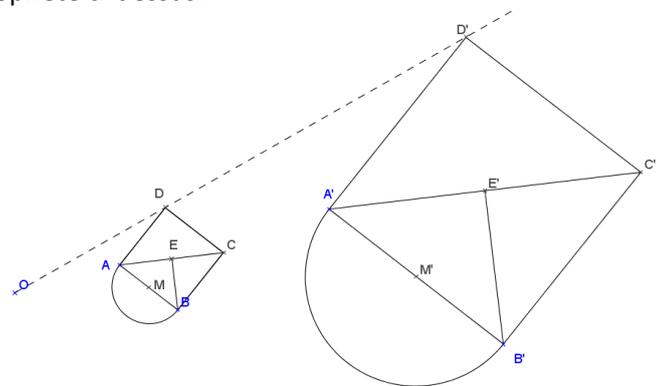


Image par l'homothétie de centre O et de rapport 3.

## Caractériser

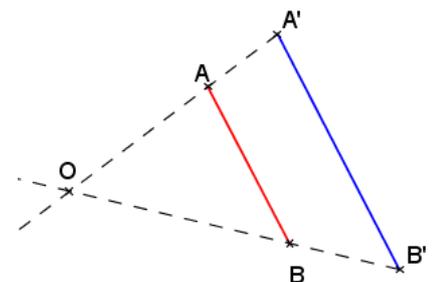
Pour caractériser une homothétie, il faut trouver son centre et son rapport.

Repérer 2 points A et B et leurs images A' et B' telles que ces points ne soient pas alignés.

Tracer les 2 demi-droites [A'A) et [B'B) ; elles se coupent en O qui est le centre.

Mesurer [OA) et [OA').

Le rapport k vérifie :  $k = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$ .



# PUISSANCES de 10 et NOTATION SCIENTIFIQUE

## Définition

Le nombre noté  $a^n$  qui se lit « a exposant n » est le produit de n facteurs tous égaux à a.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs}}$$

## Exemples

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32 \quad 3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81 \quad (-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$$

## Remarques

$a^2$  se lit "a exposant 2" ou "a au carré"

$a^3$  se lit "a exposant 3" ou "a au cube"

## Astuce

La règle des signes s'applique pour le calcul des puissances.

Le signe de  $a^n$  est positif si :

- a est positif
- ou a est négatif et n est pair (0, 2, 4, 6, 8, 10 ...).

Le signe de  $a^n$  est négatif si : a est négatif et n est impair (1, 3, 5, 7, 9, 11 ...).

## Exemples

$4^5$  est positif

$(-4)^5$  est négatif car il y a 5 facteurs négatifs.

$(-10)^8$  est positif car il y a 8 facteurs négatifs.

## Application

Parcours vert

## Propriété de priorité opératoire - admise

Pour calculer une expression numérique, on procède selon l'ordre suivant :

1. On calcule l'intérieur des parenthèses. Si des parenthèses sont imbriquées (l'une dans l'autre), on commence par celles qui sont le plus à l'intérieur.
2. On calcule les puissances.
3. On effectue les multiplications et divisions.
4. On termine toujours par les additions et soustractions.

## Exemple

$$\begin{aligned} & 4 \times 5^2 \times (5 - 4 \times 3) \\ &= 4 \times 5^2 \times (5 - 12) \\ &= 4 \times 5^2 \times (-7) \\ &= 4 \times 25 \times (-7) \\ &= 100 \times (-7) \\ &= -700 \end{aligned}$$



Attention à la position du signe "-" dans le calcul des puissances

$$(-2)^4 = 16 \text{ car } (-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = +16$$

$$-2^4 = -16 \text{ car } -2^4 = -2 \times 2 \times 2 \times 2 = -16$$

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

La puissance est prioritaire sur le signe "-" qui correspond à une soustraction.

On calcule d'abord la puissance.

## Propriété 1 - admise

$$x^a \times x^b = x^{a+b}$$

S'il y a le même nombre en bas, on additionne les puissances

## Exemples

$$2^3 \times 2^7 = 2^{3+7} = 2^{10}$$

$$3^4 \times 3^7 = 3^{4+7} = 3^{11}$$

$$(-2)^3 \times (-2)^7 = (-2)^{3+7} = (-2)^{10}$$

## "Justification"

$$2^3 \times 2^7 = 2 \times 2 = 2^{3+7} = 2^{10}$$

⚠ Attention à la consigne car on peut attendre deux résultats différents.

### Calcule

### Mettre $2^3 \times 2^5$ sous la forme d'une seule puissance

$$2^3 \times 2^5 = 8 \times 32 = 256$$

Le résultat est un nombre (entier ou décimal) ou une fraction

$$2^3 \times 2^5 = 2^8$$

Le résultat est **une** puissance

**Propriété 2** - admise

$$(x^a)^b = x^{a \times b}$$

Si les puissances sont imbriquées, on multiplie les exposants.

**Exemples**

$$(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12} \quad (10^2)^4 = 10^{2 \times 4} = 10^8$$

"Justification"

$$(2^3)^4 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 = 2 \times 2 = 2^{12}$$

**Remarque**

$\leftarrow \div 10 \rightarrow$								
$\leftarrow \times 10 \rightarrow$								
$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	$10^0$	$10^1$	$10^2$	$10^3$	$10^4$
0,0001	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1 000	10 000
$\frac{1}{10000}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$					
$\frac{1}{10^4}$	$\frac{1}{10^3}$	$\frac{1}{10^2}$	$\frac{1}{10^1}$					

$$10^{-4} = \frac{1}{10^4}$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3}$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2}$$

$$10^{-1} = \frac{1}{10^1}$$

**Propriété 3** - admise

Si  $x \neq 0$  alors  $x^0 = 1$

**Exemples**

$$4^0 = 1$$

$$(-4)^0 = 1$$

$$\pi^0 = 1$$

$$2,7^0 = 1$$

$$(-4,8)^0 = 1$$

$$-9^0 = -1$$

**Propriété 4** - admise

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

L'exposant négatif devient « 1 sur ... »

**Exemples**

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \quad 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} \quad (-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = \frac{1}{-32} = -\frac{1}{32}$$

**Propriété** - admise

Soit  $n$  un entier positif.

$10^n$  s'écrit avec un "1" suivi de  $n$  "0".

$10^{-n}$  s'écrit "0,0...01" avec  $n$  "0" au total en comptant celui avant la virgule.

**Exemples**

$$10^7 = 10000000$$

7 zéros

$$10^{-8} = 0,00000001$$

8 zéros

**Définition**

Un nombre est dit **sous la forme scientifique** (ou en **notation scientifique**) s'il s'écrit sous la forme :  $a \times 10^n$

↙ ↘

$a$  est un nombre décimal dont la distance à zéro est supérieure ou égale à 1 et strictement inférieure à 10 (il ne peut pas être égal à 10).

$n$  est un entier relatif (positif ou négatif)

**Exemples** de nombres n'étant pas en notation scientifique

$$15$$

Il manque  $\times 10^{\dots}$

$$10^3$$

Il manque un nombre devant

$$15 \times 10^4$$

Le nombre devant est supérieur à 10.

$$10 \times 10^4$$

Le nombre devant est égal à 10.

$$0,8 \times 10^4$$

Le nombre devant n'est pas supérieur ou égal à 1.

$$1,5 \times 10^{4,2}$$

L'exposant n'est pas entier

## Exemples de nombres étant sous la forme scientifique

$1 \times 10^4$

$1,5 \times 10^{-5}$

$-1,5 \times 10^{42}$

$-9,5 \times 10^{-12}$

$-1,7 \times 10^0$

$1,5 \times 10^0$

## Rappels

Si  $n$  est positif, multiplier par  $10^n$  c'est décaler la virgule de  $n$  rangs vers la droite.

Si  $n$  est négatif, multiplier par  $10^{-n}$  c'est décaler la virgule de  $n$  rangs vers la gauche.

## Exemples de passage de la notation scientifique à la notation décimale.

$4,52 \times 10^4 = 45200$

$-6 \times 10^4 = -60000$

$4,52 \times 10^{-4} = 0,000452$

## Exemples de passage de la notation décimale à la notation scientifique.

$123,45 = 1,2345 \times 10^2$

$10^2 = 100$

$0,012345 = 1,2345 \times 10^{-2}$

$10^{-2} = 0,01$

$123,45 \times 10^5 = 1,2345 \times 10^2 \times 10^5 = 1,2345 \times 10^7$

## Remarque

Pour faire un calcul avec des nombres en notation scientifique (où apparaissent uniquement des quotients ou produits), on commence par regrouper les nombres décimaux et les puissances de 10.

## Exemples

$12 \times 10^4 \times 55 \times 10^8 = 12 \times 55 \times 10^4 \times 10^8 = 660 \times 10^{12} = 6,6 \times 10^2 \times 10^{12} = 6,6 \times 10^{14}$

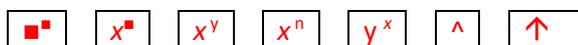
$25 \times 10^{-14} \times (-400) \times 10^8 = 25 \times (-400) \times 10^{-14} \times 10^8 = -10000 \times 10^{-6} = -1 \times 10^4 \times 10^{-6} = -1 \times 10^{-2}$

$0,0055 \times 10^7 \times 2 \times 10^8 = 0,0055 \times 2 \times 10^7 \times 10^8 = 0,011 \times 10^{15} = 1,1 \times 10^{-2} \times 10^{15} = 1,1 \times 10^{13}$

$$\frac{45 \times 10^{23} \times 24 \times 10^{-4}}{18 \times 10^5} = \frac{45 \times 24}{18} \times \frac{10^{23} \times 10^{-4}}{10^5} = \frac{1080}{18} \times \frac{10^{19}}{10^5} = 60 \times 10^{14} = 6 \times 10^1 \times 10^{14} = 6 \times 10^{15}$$

## Utilisation de la calculatrice

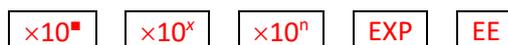
Pour calculer avec des puissances on utilise la touche :



Dans la suite, on nommera  $x^y$  cette touche.

Pour calculer  $5^3 \times 2 - (2 - 5)^4$  on tape  $5 \ x^y \ 3 \times 2 - (2 - 5) \ x^y \ 4$  et on trouve 169.

Pour calculer avec des puissances on utilise la touche :



Dans la suite, on nommera  $\times 10^y$  cette touche. Elle remplace l'appui sur les touches  $\times 10 \ x^y$

Pour calculer  $12 \times 10^4 \times 55 \times 10^8$  on tape  $12 \ \times 10^y \ 4 \times 55 \ \times 10^y \ 8$  et on trouve  $6,6 \times 10^{14}$ .

PARCOURS  
DIFFERENCIÉS



<https://www.lesmathsdherve.net/puissances-parcours-differencies/>



<https://www.lesmathsdherve.net/puissances-videos/>



<https://www.lesmathsdherve.net/puissances-aide/>

# STATISTIQUES

## Exemple

Voici la liste des âges en mois d'élèves de troisième :

180	176	179	176	182	178	184	181	179	173	182
187	175	181	174	183	178	180	178	184	173	175
173	180	195	179	174	182	172	174	195	183	193
190	181	173	177	180	183	180	183	186	180	

## Définitions

On appelle **effectif total** le nombre de valeurs de la série.

Ici, l'effectif total est 43.

On appelle **effectif de A** le nombre de fois où A apparaît dans la série.

L'effectif de 178 est 3 car il y a 3 personnes ayant 178 mois.

On appelle **fréquence de A** le quotient de l'effectif de A par l'effectif total.

La fréquence de 178 est  $\frac{3}{43}$ , ce qui signifie que 3 élèves sur les 43 du groupe ont 178 mois.

$$\text{Fréquence de A} = \frac{\text{Effectif de A}}{\text{Effectif total}}$$

Les fréquences sont (souvent) exprimées en pourcentages.

La fréquence de 178 est  $\frac{3}{43} \approx 7\%$ .

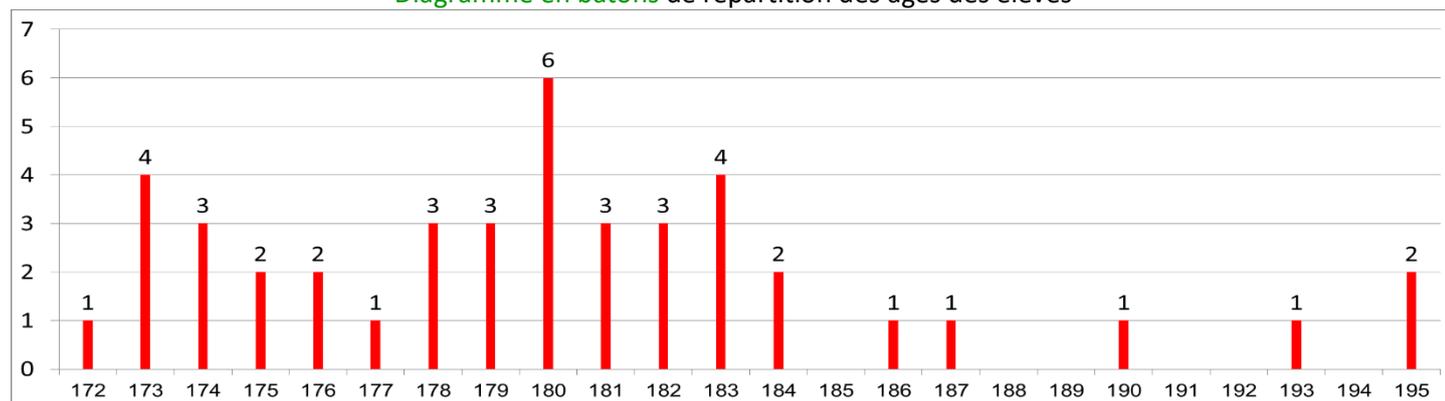
$$\text{Fréquence de A en \%} = \text{Fréquence de A} \times 100 = \frac{\text{Effectif de A}}{\text{Effectif total}} \times 100$$

## Exemple des âges

Age en mois	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	186	187	190	193	195	Total
Effectif	1	4	3	2	2	1	3	3	6	3	3	4	2	1	1	1	1	2	43
Fréquence	1/43	4/43	3/43	2/43	2/43	1/43	3/43	3/43	6/43	3/43	3/43	4/43	2/43	1/43	1/43	1/43	1/43	2/43	1
Fréquence en %	2%	9%	7%	5%	5%	2%	7%	7%	14%	7%	7%	9%	5%	2%	2%	2%	2%	5%	100%

}  $\div 43$   
}  $\times 100$

Diagramme en bâtons de répartition des âges des élèves



## Définitions

On appelle **minimum** la plus petite valeur de la série.

Le minimum est 172.

On appelle **maximum** la plus grande valeur de la série.

Le maximum est 195.

On appelle **étendue** l'écart entre le minimum et le maximum.

L'étendue est  $195 - 172 = 23$  mois.

On appelle *médiane* une valeur qui partage la série en deux sous-parties de même effectif tel que dans une sous-partie sont regroupées toutes les valeurs inférieures ou égales à la médiane et dans l'autre sont regroupées toutes les valeurs supérieures ou égales à la médiane.

### Remarque

Une médiane peut être une valeur de la série (ou non).

### Comment déterminer une médiane ?

On ordonne (on trie) la série (par ordre croissant).

On détermine l'effectif total N.

Si N est impair, la médiane est une des valeurs de la série ; c'est la  $\frac{N+1}{2}$  ème.

Si N est pair, une médiane est entre deux valeurs de la série ; entre la  $\frac{N}{2}$  ème et la  $\frac{N}{2} + 1$  ème.

### Astuce pour déterminer la position de la médiane

On calcule  $\frac{N+1}{2}$

Si on trouve un nombre entier, c'est la position de la médiane dans la série

Si ce n'est pas un nombre entier, la position de la médiane est donnée par les deux entiers consécutifs encadrant  $\frac{N+1}{2}$ .

### Exemple 1

Dans la série 1 ; 2 ; 5 ; 7 ; 8 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10, l'effectif total est 9, donc la médiane est la 5<sup>ème</sup> valeur de la série ordonnée.

La série ordonnée est 1 ; 2 ; 5 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 donc la médiane est 6.

On prend les 2 entiers consécutifs encadrant  $\frac{10+1}{2} = 5,5$

On calcule  $\frac{9+1}{2} = 5$

### Exemple 2

Dans la série 1 ; 2 ; 6 ; 7 ; 11 ; 15 ; 15 ; 17 ; 17 ; 17, l'effectif total est 10, donc une médiane est entre la 5<sup>ème</sup> valeur et la 6<sup>ème</sup> valeur de la série ordonnée.

La série est déjà ordonnée donc la médiane est **entre 11 et 15**. On peut prendre n'importe quelle valeur, mais on choisit le « milieu » de l'intervalle. Ici, une médiane est 13.

### Exemple des âges

Dans l'exemple des âges, l'effectif total est 43. Une médiane est la 22<sup>ème</sup> valeur de la série ordonnée.

La série ordonnée commence par : 172, 173, 173, 173, 173, 174, 174, 174, 175, 175, 176, 176, 177, 178, 178, 178, 179, 179, 179, 180, 180, 180, 180, 180, 181, 181, 181 ...

Inutile de trier toute la série car il nous faut juste la 22<sup>ème</sup> valeur.

La médiane est 180 mois.

### Comment calculer la moyenne - Méthode 1

1. On additionne toutes les valeurs.
2. On divise par l'effectif total.

### Exemple des âges

Soit M la moyenne de cette série.

$$M = (180 + 176 + 179 + 176 + 182 + 178 + 184 + 181 + 179 + 173 + 182 + 187 + 175 + 181 + 174 + 183 + 178 + 180 + 178 + 184 + 173 + 175 + 173 + 180 + 195 + 179 + 174 + 182 + 172 + 174 + 195 + 183 + 193 + 190 + 181 + 173 + 177 + 180 + 183 + 180 + 183 + 186 + 180) \div 43$$

$$= 7751 \div 43 \approx 180,2 \text{ mois.}$$

L'âge moyen est de  $7750 \div 43 \approx 180,2$  mois.

### Comment calculer la « moyenne pondérée » - Méthode 2

1. On calcule la somme de toutes les valeurs en utilisant le tableau d'effectifs.
2. On divise par l'effectif total.

### Exemple des âges

Age en mois	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	186	187	190	193	195
Effectif	1	4	3	2	2	1	3	3	6	3	3	4	2	1	1	1	1	2

Soit M la moyenne de cette série.

$$M = (172 + 4 \times 173 + 3 \times 174 + 2 \times 175 + 2 \times 176 + 177 + 3 \times 178 + 3 \times 179 + 6 \times 180 + 3 \times 181 + 3 \times 182 + 4 \times 183 + 2 \times 184 + 186 + 187 + 190 + 193 + 2 \times 195) \div 43 = 7751 \div 43 \approx 180,2 \text{ mois.}$$

L'âge moyen est de  $7750 \div 43 \approx 180,2$  mois.

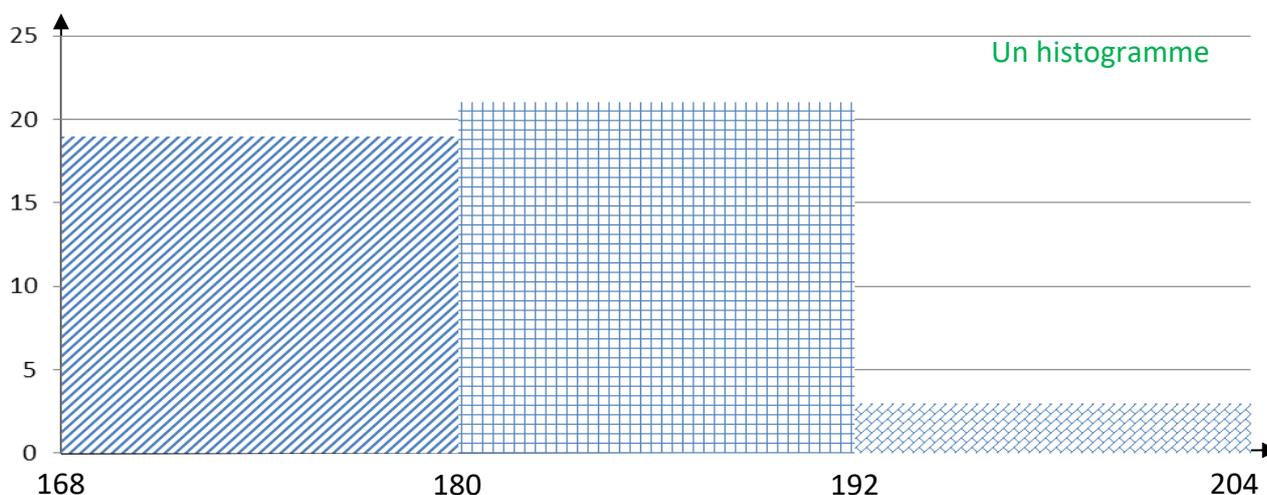
### Partage en classes de valeurs

On regroupe les valeurs de la série en classes de valeurs.

Par exemple, on peut regrouper les personnes qui ont le même nombre d'années.

Age en mois	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	186	187	190	193	195
Effectif	1	4	3	2	2	1	3	3	6	3	3	4	2	1	1	1	1	2

Age en mois	Effectif	Fréquence	Fréquence en %
[168 ; 180[	19	19/43	44 %
[180 ; 192[	21	21/43	49 %
[192 ; 204[	3	3/43	7 %
Total	43	1	100 %



### Définition

On appelle *centre de la classe*, le milieu de l'intervalle définissant la classe.

### Exemple des âges.

Le milieu de l'intervalle [168 ; 180[ est 174. Pour le calculer on effectue  $\frac{168+180}{2}$ .

Age en mois	Effectif	Fréquence	Fréquence en %	Centre de la classe
[168 ; 180[	19	19/43	44 %	174
[180 ; 192[	21	21/43	49 %	186
[192 ; 204[	3	3/43	7 %	198
Total	43	1	100 %	

### Calcul d'une valeur approchée de la moyenne.

On suppose que les valeurs sont regroupées aux centres des classes.

Soit M une valeur approchée de la moyenne de cette série.

$$M = (19 \times 174 + 21 \times 186 + 3 \times 198) \div 43 = 7806 \div 43 \approx 181,5 \text{ mois.}$$

Une valeur approchée de l'âge moyen est  $7806 \div 43 \approx 181,5$  mois.

### Remarques

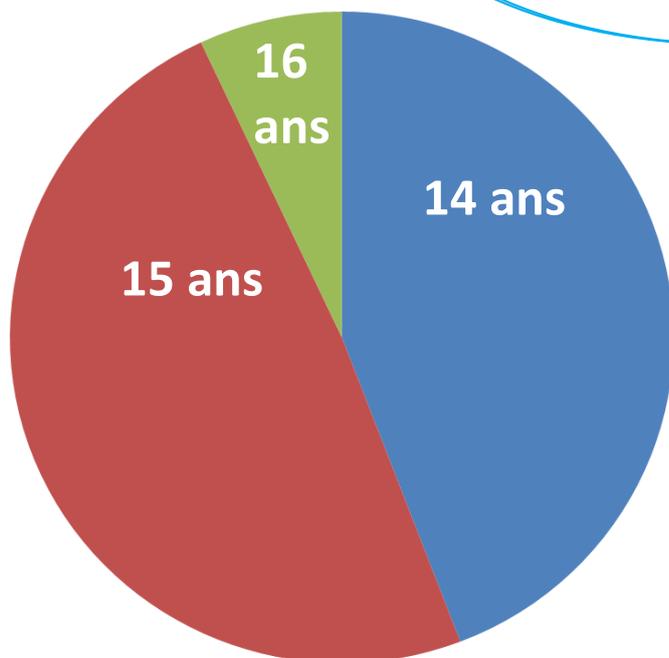
Le résultat est très bon.

La précision de la mesure est le mois et on trouve 1,3 mois d'écart avec la valeur exacte.

Cette méthode (malgré sa forte approximation) donne souvent de très bons résultats.

## Exemple des âges

Age en mois	Effectif	Fréquence	Fréquence en %	Angle sur le diagramme circulaire en degré	Centre de la classe
[168 ; 180[	19	19/43	44 %	159°	174
[180 ; 192[	21	21/43	49 %	176°	186
[192 ; 204[	3	3/43	7 %	25°	198
Total	43	1	100 %	360°	



Un diagramme circulaire

$\times 3,6$

$\times 360$

$\times \frac{360}{43}$

PARCOURS DIFFÉRENCIÉS



<https://www.lesmathsdherve.net/statistiques-parcours-differencies/>



<https://www.lesmathsdherve.net/statistiques-videos/>



<https://www.lesmathsdherve.net/statistiques-aides/>

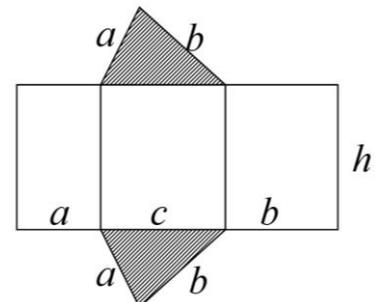
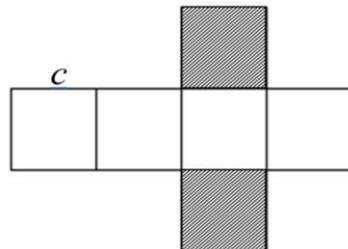
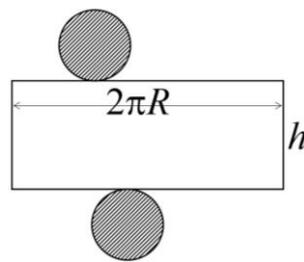
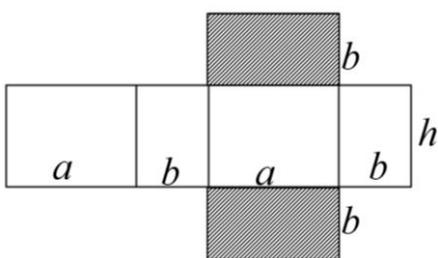
# SOLIDES, agrandissement/réduction

## I – Rappel sur les aires

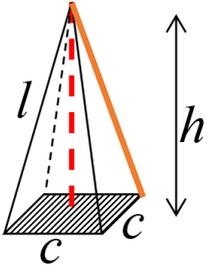
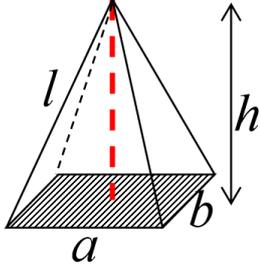
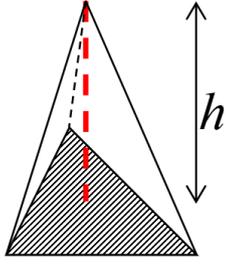
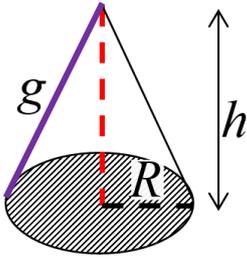
<p><b>Carré</b></p> <p><math>A = c^2</math></p>	<p><b>Rectangle</b></p> <p><math>A = L \times l</math></p>	<p><b>Losange</b></p> <p><math>A = d \times d' \div 2</math></p>	<p><b>Parallélogramme</b></p> <p><math>A = L \times h</math></p>
<p><b>Triangle rectangle</b></p> <p><math>A = \frac{b \times h}{2}</math></p>	<p><b>Triangle quelconque</b></p> <p><math>A = \frac{b \times h}{2}</math></p>	<p><b>Trapèze</b></p> <p><math>A = \frac{(b + B) \times h}{2}</math></p>	<p><b>Disque</b></p> <p><math>A = \pi \times r^2</math></p>

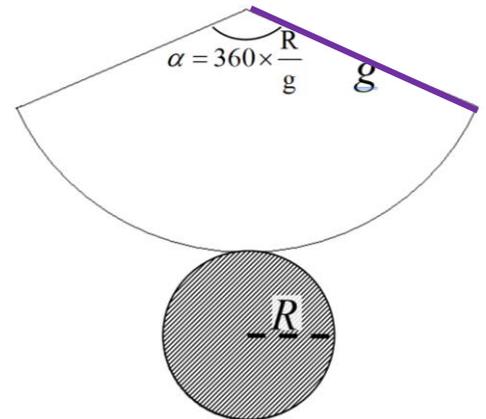
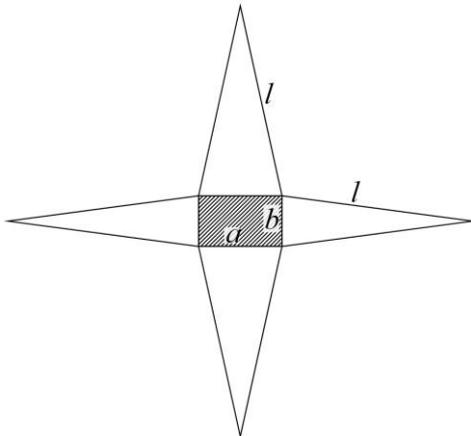
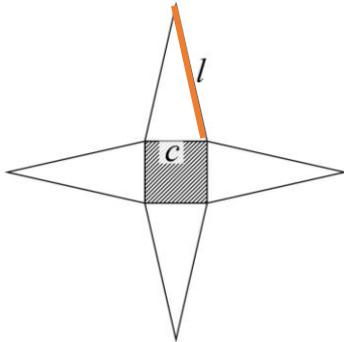
## II – La famille des prismes

<p><b>Parallélépipède rectangle</b> Pavé droit</p>	<p><b>Cube</b></p>	<p><b>Cylindre</b></p>	<p><b>Prisme droit</b></p>
♥ <b>Volume = Aire de la base × hauteur</b>			
$V = a \times b \times h$	$V = c \times c \times c = c^3$	$V = \pi \times R^2 \times h$	$V = \text{aire triangle} \times h$



### III – La famille des pyramides

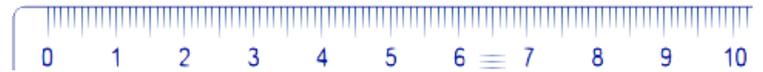
Pyramide régulière	Pyramide	Tétraèdre	Cône
			
♥ <b>Volume = <math>\frac{\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}</math></b>			
$V = \frac{c^2 \times h}{3}$	$V = \frac{a \times b \times h}{3}$	$V = \frac{\text{aire triangle} \times h}{3}$	$V = \frac{\pi \times R^2 \times h}{3}$



## IV – Conversions

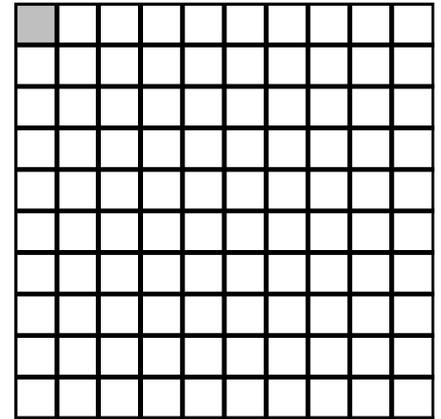
### Longueurs

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
					1	0



### Aires

km <sup>2</sup>		hm <sup>2</sup>		dam <sup>2</sup>		m <sup>2</sup>		dm <sup>2</sup>		cm <sup>2</sup>		mm <sup>2</sup>	
			ha		a		ca						
						1	0	0					
				3	5	0,							
		7	0										



1 ha se lit « un hectare »

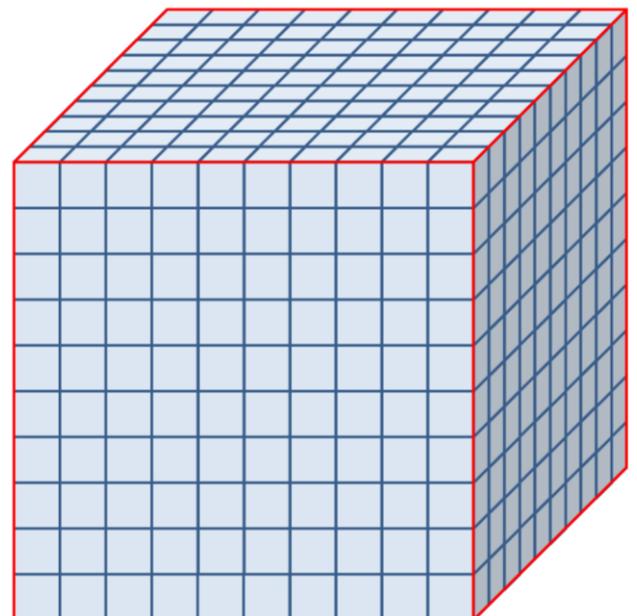
1 a se lit « un are »

1 ca se lit « un centiare »

### Volumes

km <sup>3</sup>			hm <sup>3</sup>			dam <sup>3</sup>			m <sup>3</sup>			dm <sup>3</sup>			cm <sup>3</sup>			mm <sup>3</sup>		
									1	0	0	0								
											hL	daL	L	dL	cL	mL				
												1	5,	3	4					
													2,	4	5	4				

1 dm<sup>3</sup> = 1L



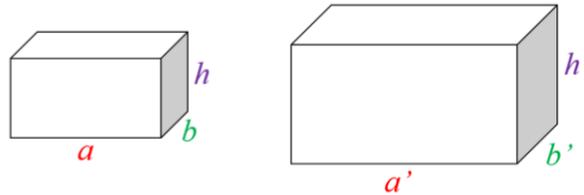
## V – Agrandissements / réductions

**Propriété** admise

Si une figure est un agrandissement (ou une réduction) d'une autre figure de rapport  $k$  :

- les distances sont multipliées par  $k$ ,
- les aires sont multipliées par  $k^2$ ,
- les volumes sont multipliés par  $k^3$ .

**Démonstration** dans le cas des pavés droits.



Si le pavé de droite est un agrandissement du pavé gauche de coefficient  $k$ , alors on a :

$$a' = k \times a, b' = k \times b, \text{ et } h' = k \times h.$$

Le volume du pavé de gauche est  $V = a \times b \times h$

Le volume du pavé de droite est  $V' = a' \times b' \times h'$

$$V' = a' \times b' \times h' = k \times a \times k \times b \times k \times h = k^3 \times a \times b \times h = k^3 \times V$$

**Comment** calculer le coefficient d'agrandissement-réduction ?

1. On repère une distance connue sur les 2 solides.
2. On calcule le coefficient par la formule :

$$k = \frac{\text{distance sur le solide d'arrivée}}{\text{distance correspondante sur le solide de départ}}$$

Pour trouver le coefficient d'agrandissement-réduction, on repère une longueur connue sur le solide de départ et sur le solide d'arrivée.

### Exemple 1

On donne une pyramide régulière de base ABCD et de sommet S.

On donne  $AB = 12 \text{ cm}$  et  $OS = 21 \text{ cm}$ .

1°) Calculer le volume de SABCD.

2°) On coupe cette pyramide par un plan parallèle à la base ABCD.

On obtient une réduction  $SA'B'C'D'$ .

On donne  $A'B' = 9 \text{ cm}$ .

Calculer le rapport de réduction.

En déduire le volume de  $SA'B'C'D'$ .

1°) Soit  $V$  le volume de SABCD.

$$V = \frac{AB \times BC \times SO}{3} = \frac{12 \times 12 \times 21}{3} = 1008$$

Le volume de la pyramide SABCD est  $1008 \text{ cm}^3$ .

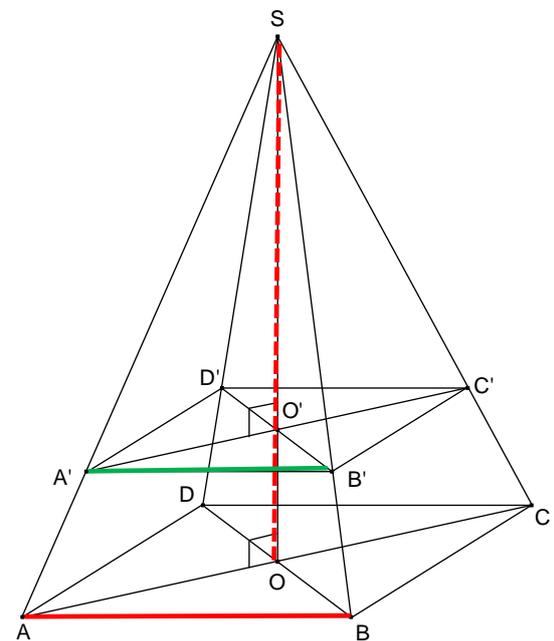
2°) Soit  $k$  le coefficient de réduction de SABCD vers  $SA'B'C'D'$ .

$$k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = 0,75$$

Soit  $V'$  le volume de  $SA'B'C'D'$ .

$$V' = k^3 \times V = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times 1008 = 425,25$$

Le volume de  $SA'B'C'D'$  est  $425,25 \text{ cm}^3$ .



## Exemple 2

Sur la figure suivante, on donne les informations suivantes :

- $SO = 6 \text{ cm}$
- $AO = 5 \text{ cm}$
- $SO' = 15 \text{ cm}$ .

Calculer le volume du grand cône.

On donnera le volume en litre, arrondi au millilitre près.

Soit  $V$  le volume du petit cône.

$$V = \frac{\pi \times R^2 \times h}{3} = \frac{\pi \times OA^2 \times OS}{3} = \frac{\pi \times 5^2 \times 6}{3} = 50\pi \text{ cm}^3$$

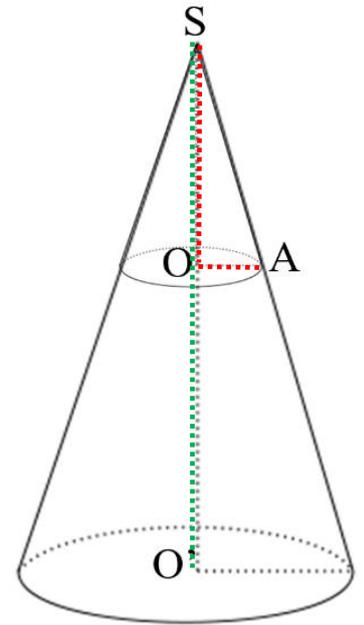
Soit  $k$  le coefficient d'agrandissement du petit vers le grand cône.

$$k = \frac{SO'}{SO} = \frac{15}{6} = 2,5$$

Soit  $V'$  le volume du grand cône.

$$V' = k^3 \times V = 2,5^3 \times 50\pi = 781,25\pi$$

Le volume du grand cône est  $781,25\pi \approx 2454 \text{ cm}^3 = 2,454 \text{ L}$ .



## VI – Repérage

### Avec 1 dimension

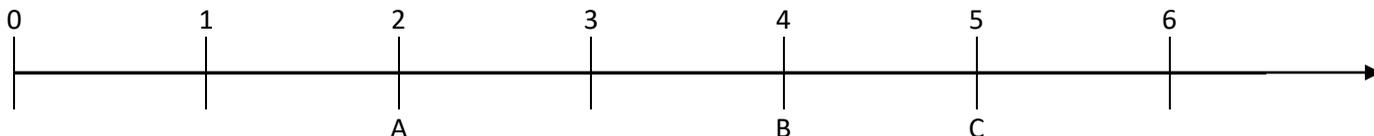
Pour se repérer, on a besoin de 2 points :

- l'origine (souvent le point O)
- l'unité (souvent le point I, ou le nombre 1).

On appelle *droite graduée*, une droite sur laquelle on a placé une origine et une unité.



Pour graduer la droite, il faut reporter l'unité.



Au lieu de parler de droite graduée, on pourra aussi parler d'axe gradué.

Lorsque l'on place un point sur une droite graduée, le nombre correspondant à ce point est appelé l'affixe de ce nombre.

Certaines fois on emploiera le mot abscisse.

L'affixe de A est 2 ; on notera A(2).

L'abscisse de B est 4.

Le nombre 4 est l'affixe du point B.

Le point C a pour affixe 5.

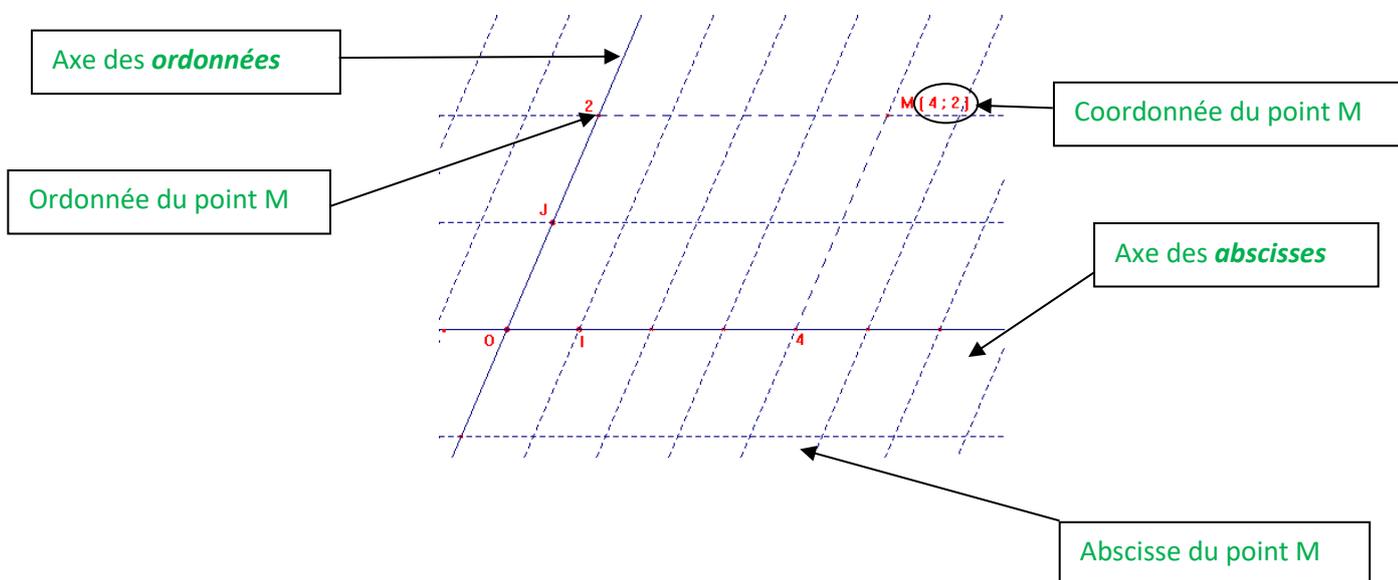
## Avec 2 dimensions

Pour définir un repère, il faut donner 3 points non alignés :

- un point qui donne l'origine du repère
- un point qui donne l'unité sur l'axe des abscisses
- un point qui donne l'unité sur l'axe des ordonnées.

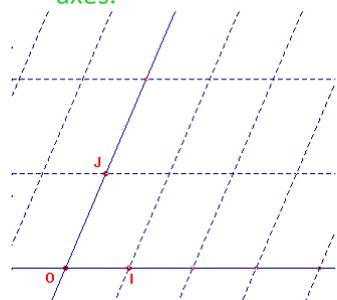
Le repère  $(O ; I ; J)$  est un repère pour lequel :

- est l'origine du repère
- $I$  donne l'unité sur l'axe des abscisses
- $J$  donne l'unité sur l'axe des ordonnées.



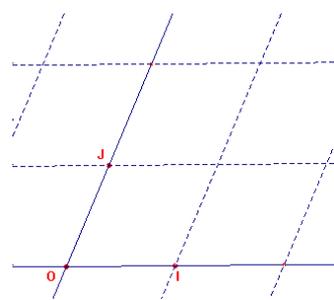
Le repère  $(O ; I ; J)$  est dit *quelconque* si

- ses axes ne sont pas perpendiculaires
- les unités ne sont pas les mêmes sur les deux axes.



Le repère  $(O ; I ; J)$  est dit *normé* ou *normal* si :

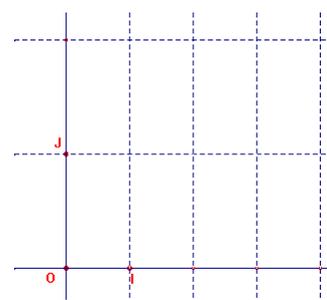
- $OI = OJ$



Même unité sur les deux axes.

Le repère  $(O ; I ; J)$  est dit *orthogonal* si :

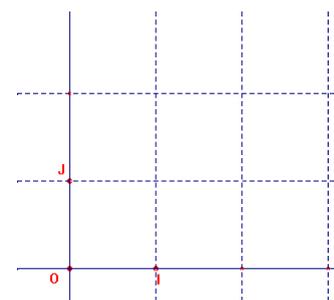
- $(OI) \perp (OJ)$



Axes perpendiculaires.

Le repère  $(O ; I ; J)$  est dit *orthonormé* ou *orthonormal* si :

- $OI = OJ$
- $(OI) \perp (OJ)$



Axes perpendiculaires  
Même unité sur les deux axes.

### Avec 3 dimensions

Pour définir un repère, il faut donner 4 points non alignés :

- un point qui donne l'origine du repère
- un point qui donne l'unité sur l'axe des abscisses
- un point qui donne l'unité sur l'axe des ordonnées.
- un point sur l'axe des hauteurs.

Le repère (O ; I ; J ; K) est un repère pour lequel :

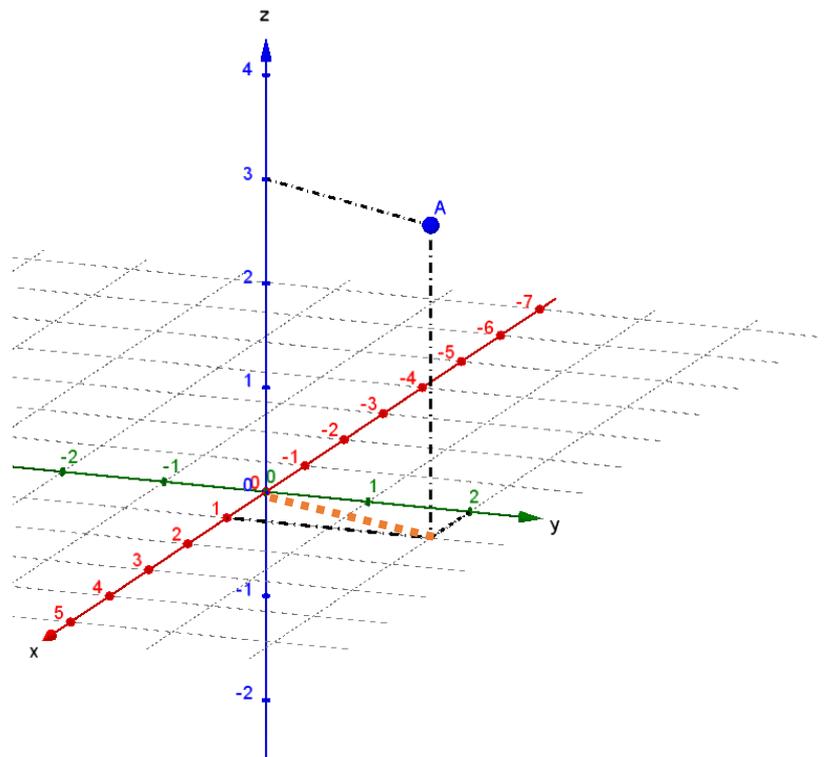
- est l'origine du repère
- I donne l'unité sur l'axe des abscisses
- J donne l'unité sur l'axe des ordonnées
- K donne l'unité sur l'axe des hauteurs.

Pour se repérer dans l'espace, on « projette » le point sur le plan « horizontal ».

On commence par donner les coordonnées de ce point sur le plan en traçant les parallèles aux axes du plan de base ; ici on obtient 1 et 2 ; les coordonnées de ce point sont (1 ; 2).

On relie de point à l'origine du repère puis on trace la parallèle qui passe par A ; cette parallèle coupe l'axe des hauteurs qui indique alors la hauteur du point ; ici c'est 3.

Le point A a pour coordonnées : A(1 ; 2 ; 3).



PARCOURS  
DIFFÉRENCIÉS



<https://www.lesmathsdherve.net/soli-des-parcours-differencies/>



<https://www.lesmathsdherve.net/soli-des-videos-2/>



<https://www.lesmathsdherve.net/soli-des-aidesd/>

MATHS



<https://www.lesmathsdherve.net/soli-des-diaporama-2/>

## FONCTIONS : généralités

### Exemple de la balle

On a lancé une balle en l'air.

Sur l'axe des abscisses se trouve le temps en secondes et sur l'axe des ordonnées se trouve la hauteur de la balle en mètres.

La hauteur de la balle dépend du temps ; on dit qu'on peut donner la hauteur de la balle en fonction du temps. On appelle  $x$  le temps et  $f$  la hauteur de la balle en fonction du temps. On dit qu'on peut exprimer  $f$  en fonction de  $x$ .

Après 0 seconde (au départ), la hauteur de la balle est de 15 m. On dit que 15 est l'**image** de 0 par  $f$  et on note  $f(0) = 15$ , qui se lit *f de 0 égal 15*.

Après 1 seconde, la hauteur de la balle est à son maximum ; elle est de 20 m.

On dit que 20 est l'**image** de 1 par  $f$  et on note  $f(1) = 20$ .

Après 2 secondes, la hauteur de la balle est de 15 m.

On dit que 15 est l'**image** de 2 par  $f$  et on note  $f(2) = 15$ .

Après 3 secondes, la hauteur de la balle est de 0 m.

On dit que 0 est l'**image** de 3 par  $f$  et on note  $f(3) = 0$ .

On a déterminé (par un calcul de physique) que la hauteur en fonction du temps était donnée par la formule :  $-5x^2 + 10x + 15$ .

On notera :

$$f(x) = -5x^2 + 10x + 15$$

ou

$$f : x \rightarrow -5x^2 + 10x + 15$$

On a vu qu'on pouvait lire l'image d'un nombre sur le graphique. Il est aisé de calculer cette image en utilisant la forme algébrique de la fonction.

Par exemple, on cherche la hauteur de la balle après 1,5 s. On va calculer  $f(1,5)$  :

$$f(1,5) = -5 \times 1,5^2 + 10 \times 1,5 + 15 = 18,75.$$

On peut interpréter ce résultat en disant que la hauteur de la balle après 1,5 s est de 18,75 m.

On a vu que la hauteur de la balle après 0 ou 2 secondes était la même (15 m). On dira que 0 et 2 secondes sont **des antécédents** de 15 m.

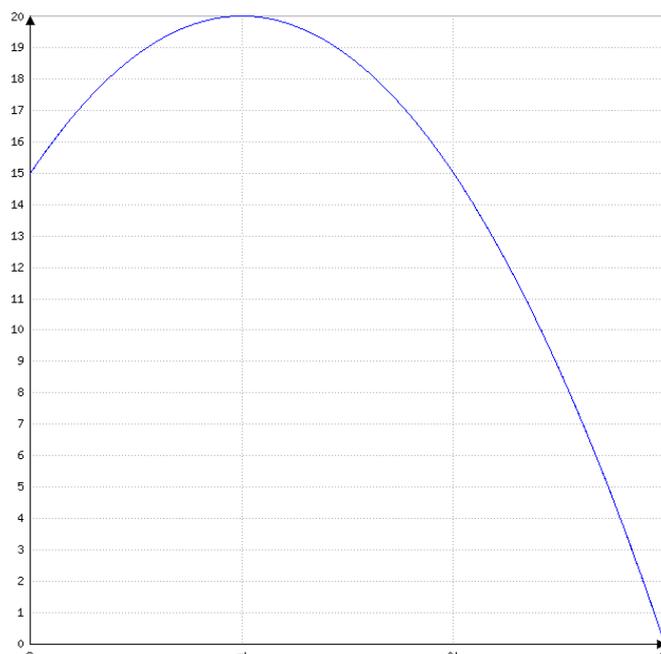
Le nombre 20 a un seul **antécédent** 1 s.

Le nombre 22 n'a pas **d'antécédent** car la balle n'est jamais montée jusqu'à 22 m.

### Remarque

Un nombre a toujours une et une seule image par une fonction.

Un nombre peut avoir : 0, 1 ou plusieurs antécédents par une fonction.



### Comment déterminer l'image d'un nombre par une fonction ?

Par exemple, on cherche l'image de 0,5 par la fonction  $f$  définie par  $f(x) = -5x^2 + 10x + 15$ .

#### 1<sup>er</sup> cas : méthode graphique

On se positionne à 0,5 sur l'axe des abscisses.

On « monte » (ou « descend ») jusqu'à croiser la courbe de la fonction.

On « part horizontalement » jusqu'à l'axe des ordonnées et on lit la valeur.

On trouve ici que  $f(0,5) \approx 18,5$ .

Par lecture graphique, on trouve une valeur dont on ne sait pas si elle est exacte.

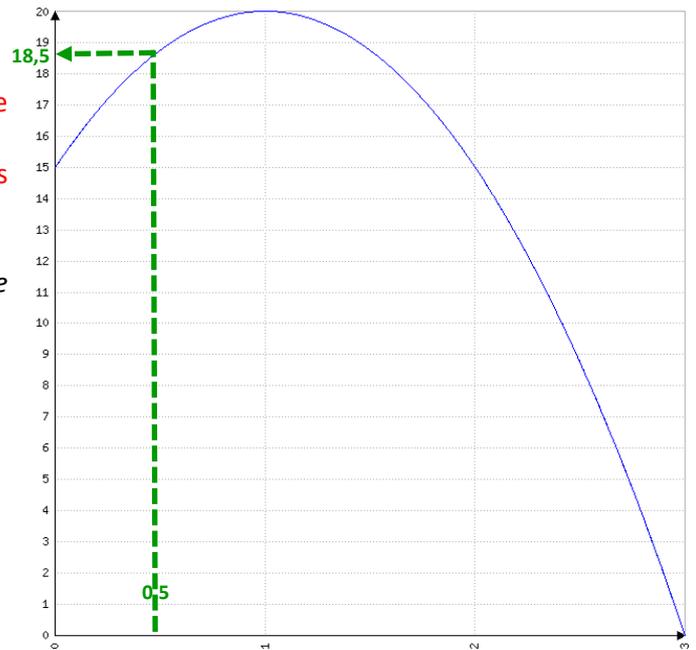
#### 2<sup>ème</sup> cas : par le calcul

Il suffit de remplacer  $x$  par 0,5 dans la formule

$$f(x) = -5x^2 + 10x + 15.$$

$$f(0,5) = -5 \times 0,5^2 + 10 \times 0,5 + 15 = 18,75.$$

On trouve une valeur exacte.



### Comment déterminer les antécédents d'un nombre par une fonction ?

#### Méthode graphique

Par exemple, on cherche les antécédents de 17 par la fonction  $f$  définie par  $f(x) = -5x^2 + 10x + 15$ .

On se positionne à 17 sur l'axe des ordonnées.

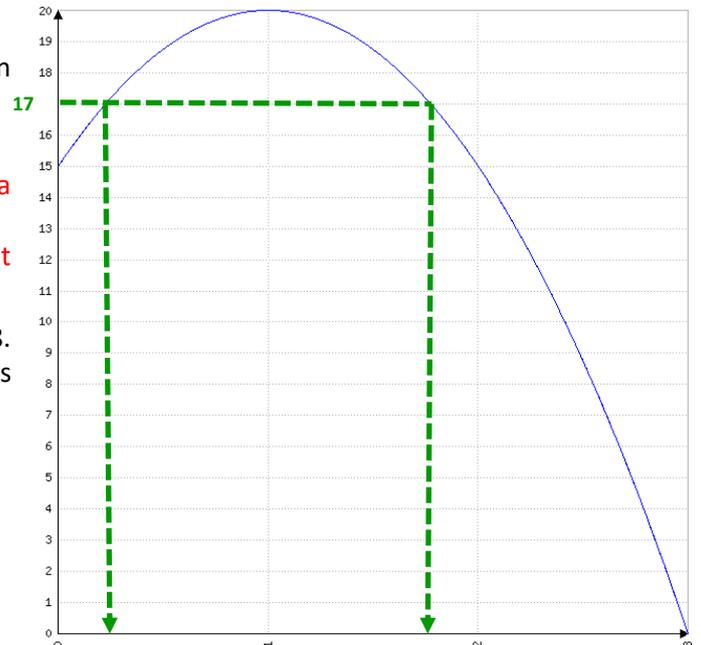
On « part horizontalement » jusqu'à croiser la courbe de la fonction.

On « monte » (ou descend) jusqu'à l'axe des abscisses et on lit les valeurs.

On trouve ici que les antécédents de 17 sont environ 0,2 et 1,8.

Par lecture graphique, on trouve des valeurs dont on ne sait pas si elles sont exactes.

Bien penser à chercher tous les antécédents.



**Comment** construire la représentation graphique d'une fonction ?

1. On construit un « tableau de valeurs ».
2. On construit un repère et on place les points dans le repère.
3. On relie les points.

Attention, les points ne sont pas obligatoirement alignés ; il faut donc les relier en formant une courbe et non pas nécessairement une droite.

**Exemple**

On veut construire la représentation graphique de la fonction  $f$  définie par la formule  $f(x) = 2x^2 - 2x - 12$  pour  $x$  appartenant à l'intervalle  $[-4 ; 4]$

On prend n'importe quels nombres.

En général, on prend les bornes de l'intervalle (ici, -4 et 4) et on place des valeurs régulièrement. Ici, le pas (l'écart entre deux nombres) est 1.

$x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	28	12	0	-8	-12	-12	-8	0	12

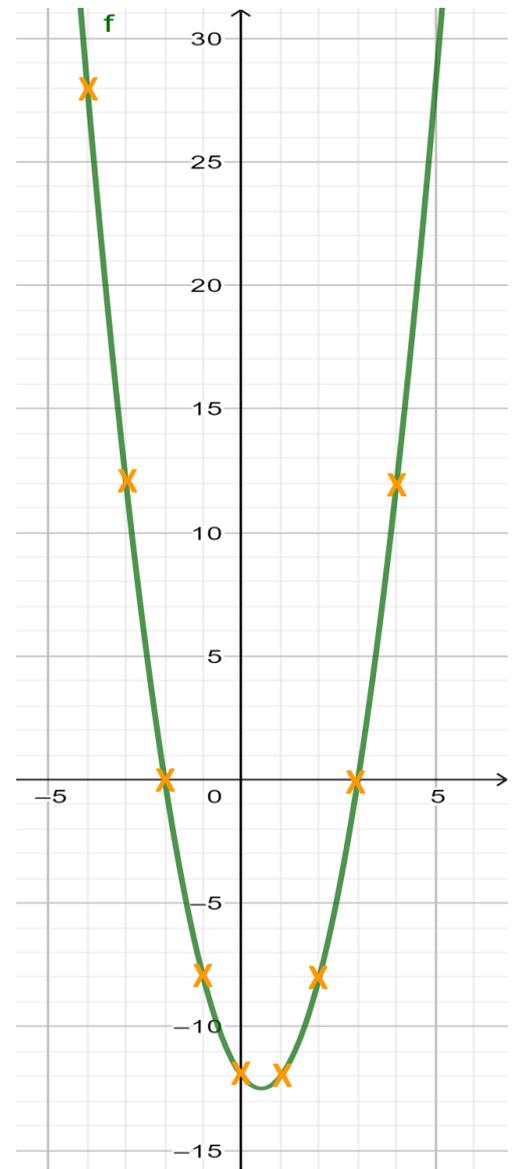
On calcule les images de la première ligne avec la formule

$$f(x) = 2x^2 - 2x - 12$$

Ce tableau de valeur peut être calculé avec la machine.

Sur la CASIO, taper

MODE <b>4</b> :table	Place la calculatrice en mode tableau de valeur
$f(x) = 2X^2 - 2X - 12$ <b>EXE</b>	On rentre la fonction en utilisant la touche X de la calculatrice.
Début ? -4 <b>EXE</b>	On rentre le point de départ du tableau de valeur.
Fin ? 4 <b>EXE</b>	On rentre le point d'arrivée du tableau de valeur.
Pas ? 1 <b>EXE</b>	On rentre le pas du tableau de valeur (l'écart entre deux nombres).
	On obtient le tableau de valeur
MODE <b>1</b> :comp	Pour revenir au mode « normal »



PARCOURS DIFFÉRENCIÉS



<https://www.lesmathsdherve.net/fonctions-parcours/>

MATHS



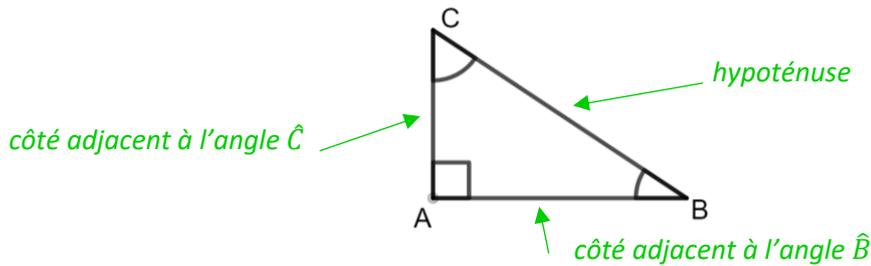
<https://www.lesmathsdherve.net/fonctions-videos/>




<https://www.lesmathsdherve.net/fonctions-aides-2/>

# Triangles rectangles : COSINUS

## Définitions



## Propriété

Dans un triangle rectangle, le rapport du côté adjacent à un angle par l'hypoténuse ne dépend que de la mesure de l'angle et pas de taille d'un triangle ; on l'appelle le **cosinus** de l'angle.

## Démonstration

Comme (A'C') et (AC) sont perpendiculaires à (AB) alors (AC)//(A'C').

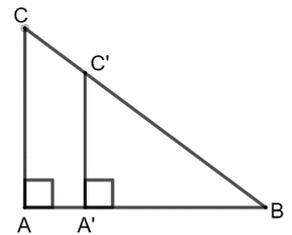
Comme (AC)//(A'C') et comme B, A', A et B, C', C sont alignés, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{BA'}{BA} = \frac{BC'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

$$BA' \times BC = BC' \times BA$$

÷BC'   ÷BC   ÷BC'   ÷BC

donc  $\frac{BA'}{BC'} = \frac{BA}{BC} = \text{cosinus de l'angle } \hat{B}$



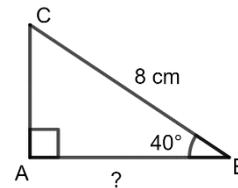
**Astuce** pour se rappeler de la formule

♥ **COS**inus = **ADJ**acent / **HYP**oténuse

**Exemple 1** : calcul d'un petit côté

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que  $BC = 8 \text{ cm}$  et  $\widehat{ABC} = 40^\circ$

Calcule AB.

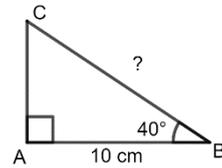


Dans ABC rectangle en A	On cite le triangle rectangle
On connait : <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\hat{B}</math></li> <li>BC : hypoténuse</li> </ul>	On identifie l'angle connu, le côté connu et le côté cherché.
On cherche : <ul style="list-style-type: none"> <li>AB : adjacent</li> </ul>	
$\cos(\hat{B}) = \frac{AB}{BC}$	On écrit la formule avec les « lettres » en veillant bien à placer les numérateurs et dénominateurs au « bon » endroit.
$\cos(40^\circ) = \frac{AB}{8}$	On remplace les valeurs connues
$\frac{\cos(40^\circ)}{1} = \frac{AB}{8}$	On transforme l'écriture pour obtenir deux fractions égales
$AB = \frac{8 \times \cos(40^\circ)}{1} \approx 6,13 \text{ cm}$	On effectue les produits en croix On donne une valeur approchée On n'oublie pas l'unité

On tape **8** **×** **cos** **40** **)** **÷** **1** **EXE**

**Exemple 2 : calcul de l'hypoténuse**

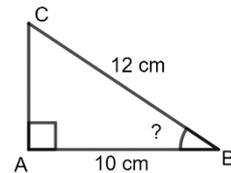
- Soit ABC un triangle rectangle en A tel que  $AB = 10 \text{ cm}$  et  $\widehat{ABC} = 40^\circ$
- Calcule BC.



Dans ABC rectangle en A	On cite le triangle rectangle
On connait : <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\widehat{B}</math></li> <li>AB : adjacent</li> </ul> On cherche : <ul style="list-style-type: none"> <li>BC : hypoténuse</li> </ul>	On identifie l'angle connu, le côté connu et le côté cherché.
$\cos(\widehat{B}) = \frac{AB}{BC}$	On écrit la formule avec les « lettres » en veillant bien à placer les numérateurs et dénominateurs au « bon » endroit.
$\cos(40^\circ) = \frac{10}{BC}$	On remplace les valeurs connues
$\frac{\cos(40^\circ)}{1} = \frac{10}{BC}$	On transforme l'écriture pour obtenir deux fractions égales
$BC = \frac{10 \times 1}{\cos(40^\circ)} \approx 13,05 \text{ cm}$	On effectue les produits en croix On donne une valeur approchée On n'oublie pas l'unité
On tape <b>8</b> <b>X</b> <b>1</b> <b>÷</b> <b>cos</b> <b>4</b> <b>0</b> <b>)</b> <b>EXE</b>	

**Exemple 3 : calcul d'un angle**

- Soit ABC un triangle rectangle en A tel que  $AB = 10 \text{ cm}$  et  $BC = 12 \text{ cm}$
- Calcule  $\widehat{ABC}$ .



Dans ABC rectangle en A	On cite le triangle rectangle
On cherche : <ul style="list-style-type: none"> <li><math>\widehat{B}</math></li> </ul> On connait : <ul style="list-style-type: none"> <li>AB : adjacent</li> <li>BC : hypoténuse</li> </ul>	On identifie l'angle connu, le côté connu et le côté cherché.
$\cos(\widehat{B}) = \frac{AB}{BC}$	On écrit la formule avec les « lettres » en veillant bien à placer les numérateurs et dénominateurs au « bon » endroit.
$\cos(\widehat{B}) = \frac{10}{12}$	On remplace les valeurs connues
$\widehat{B} = \arccos\left(\frac{10}{12}\right) \approx 34^\circ$	On donne une valeur approchée On n'oublie pas l'unité
On tape <b>SECONDE</b> <b>cos</b> <b>1</b> <b>0</b> <b>÷</b> <b>1</b> <b>2</b> <b>)</b> <b>EXE</b>	

PARCOURS DIFFÉRENCIÉS



<https://www.lesmathsdherve.net/cosinus-parcours/>

MATHS



<https://www.lesmathsdherve.net/cosinus-videos/>




<https://www.lesmathsdherve.net/cosinus-aides/>

# PROBABILITES

## Exemple des pièces

On lance une pièce de monnaie. On recommence l'expérience.

Voici les résultats obtenus par des élèves de troisième :

Nombre de piles	Nombre de faces	Total
4 374	4 626	9 000

## Définitions

On appelle *effectif total* le nombre de valeurs ou expériences.

Par exemple, la série des pièces a un effectif total de 9 000 car on a effectué 9 000 tirages (4374+4626).

On appelle *effectif de A* le nombre de fois où A apparaît.

Par exemple, pour la série des pièces l'effectif de "pile" est 4374 et l'effectif de "face" est 4626.

On appelle *fréquence de A* le quotient de l'effectif de A par l'effectif total.

$$\text{Fréquence de A} = \frac{\text{Effectif de A}}{\text{Effectif total}}$$

Par exemple, la fréquence de « Pile » est  $\frac{4\,374}{9\,000} \approx 0,486$  et la fréquence de « Face » est  $\frac{4\,626}{9\,000} \approx 0,514$ .

## Remarque

Les fréquences sont souvent exprimées en pourcentage.

Méthode 1	Méthode 2	Méthode 3						
$0,486 = \frac{48,6}{100}$	<table border="1"> <tr> <td>Pile</td> <td>4 374</td> <td>?</td> </tr> <tr> <td>Total</td> <td>9 000</td> <td>100</td> </tr> </table>	Pile	4 374	?	Total	9 000	100	$\text{Fréquence de A en \%} = \frac{\text{Effectif de A}}{\text{Effectif total}} \times 100$
Pile	4 374	?						
Total	9 000	100						
	$? = \frac{4\,374 \times 100}{9\,000}$ $? = \frac{4\,374 \times 100}{9\,000} \approx 48,6$	$\text{Fréquence de "pile" en \%} = \frac{4\,374}{9\,000} \times 100 \approx 48,6$						

La fréquence de « Pile » est d'environ 48,6%.

## Définitions

Une expérience est dite *aléatoire* si on ne peut pas prévoir l'issue de cette expérience.

Les différents résultats d'une expérience sont appelés les *issues*.

## Exemple des pièces

Les issues possibles sont "pile" ou "face". On a une chance sur deux d'obtenir une des deux issues. Elles ont la même probabilité de survenir. On dira que la probabilité d'obtenir "pile" est  $\frac{1}{2}$  et que la probabilité d'obtenir "face" est  $\frac{1}{2}$ .

On notera  $p(\text{Pile}) = \frac{1}{2}$  et  $p(\text{Face}) = \frac{1}{2}$ .

$p$  comme probabilité

## Remarque importante

Si on effectue de "nombreux" tirages, la fréquence d'apparition d'une issue se rapproche de la valeur théorique que l'on appelle probabilité.

## Exemple des pièces reproduit sur ordinateur

Nombre de tirages	10	50	100	500	1000	5000	10000	50000	100000	1000000
Nombre de "Pile"	2	23	46	240	494	2470	4908	24853	49914	500 557
Fréquence de "Pile" en %	20	46	46	48	49,4	49,4	49,08	49,706	49,914	50,0557
Ecart avec la probabilité	30	4	4	2	0,6	0,6	0,92	0,294	0,086	0,0557

## 1. Nombres Relatifs

- ⑤ Il utilise la notion d'opposé
- ⑤ Il additionne et soustrait des nombres décimaux relatifs.
- ⑤ Il repère sur une droite graduée les nombres décimaux relatifs
- ⑤ Il traduit un enchaînement d'opérations à l'aide d'une expression avec des parenthèses.
- S1 ⑤ Il effectue mentalement, à la main ou l'aide d'une calculatrice un enchaînement d'opérations en respectant les priorités
- S2 opératoires.
- S3 ⑤ Il contrôle la vraisemblance d'un résultat.
- ⑤ Il résout des problèmes faisant intervenir des nombres décimaux relatifs
- ④ Il effectue avec des nombres décimaux relatifs, des produits et des quotients.
- Vérifier la vraisemblance d'un résultat, notamment en estimant son ordre de grandeur.*

## 2. Translation (S4-S5)

- ⑥ Il complète une figure par symétrie axiale.
- ⑥ Il construit le symétrique d'un point, d'un segment, d'une droite par rapport à un axe donné et il est capable de verbaliser/expliciter sa méthode de construction.
- ⑥ Il construit la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à un axe donné sur papier ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
- ⑥ Il connaît les propriétés de conservation de la symétrie axiale et il les utilise pour raisonner.
- ⑤ Il transforme une figure par symétrie centrale.
- ⑤ Il identifie des symétries dans des frises, des pavages, des rosaces.
- S4 ⑤ Il mobilise les connaissances des figures, des configurations et des symétries pour déterminer des grandeurs géométriques.
- S5 ⑤ Il mène des raisonnements en utilisant des propriétés des figures, des configurations et des symétries.
- ⑤ Il comprend l'effet des symétries (axiale et centrale) : conservation du parallélisme, des longueurs et des angles.
- ④ Il comprend l'effet d'une translation : conservation du parallélisme, des longueurs, des aires et des angles.
- ④ Il transforme une figure par translation.
- ④ Il identifie des translations dans des frises et des pavages.
- ④ Il mobilise les connaissances des figures, des configurations et de la translation pour déterminer des grandeurs géométriques.
- ④ Il mène des raisonnements en utilisant des propriétés des figures, des configurations et de la translation.

## 3. Fractions (S6-S7-S8)

- ⑥ Il ajoute des fractions de même dénominateur.
- ⑥ Il sait utiliser des fractions pour exprimer un quotient. Il comprend que  $b \times \frac{a}{b} = a$
- ⑤ Il reconnaît et produit des fractions égales.
- ⑤ Il traduit un enchaînement d'opérations à l'aide d'une expression avec des parenthèses.
- S6 ⑤ Il effectue mentalement, à la main ou l'aide d'une calculatrice un enchaînement d'opérations en respectant les priorités
- S7 opératoires.
- S8 ⑤ Il additionne ou soustrait des fractions dont les dénominateurs sont égaux ou multiples l'un de l'autre.
- ④ Il effectue avec des nombres décimaux relatifs, des produits et des quotients.
- ④ Il calcule avec les nombres rationnels : addition, soustraction, multiplication, division.
- ④ Il résout des problèmes avec des nombres rationnels.

## 4. Proportionnalité, durée, échelle et grandeur composées

- ⑥ Il sait appliquer un pourcentage. Il relie fractions, proportions et pourcentages.
- ⑥ Il réalise des conversions nécessitant deux étapes de traitement (transformer des heures en semaines, jours et heures ; transformer des secondes en heures, minutes, secondes).
- ⑤ Il utilise, dans le cas des nombres décimaux, les écritures décimales et fractionnaires et passe de l'une à l'autre, en particulier dans le cadre de la résolution de problèmes.
- ⑤ Il traduit la relation de dépendance entre deux grandeurs par un tableau de valeur.
- ⑤ Il produit une formule représentant la dépendance de deux grandeurs.
- ⑤ Il effectue des calculs de durées et d'horaires.
- S9 ⑤ Il utilise l'échelle d'une carte.
- S10 ④ Il reconnaît sur un graphique une situation de proportionnalité ou de non-proportionnalité.
- S11 ④ Il calcule une quatrième proportionnelle par la procédure de son choix.
- ④ Il utilise une formule liant deux grandeurs dans une situation de proportionnalité.
- ④ Il résout des problèmes en utilisant la proportionnalité dans le cadre de la géométrie.
- ④ Il produit une formule littérale représentant la dépendance de deux grandeurs.
- ④ Il représente la dépendance de deux grandeurs par un graphique.
- ④ Il utilise un graphique représentant la dépendance de deux grandeurs pour lire et interpréter différentes valeurs sur l'axe des abscisses ou l'axe des ordonnées.

*Ratios.*

## 5. Calcul littéral

- ⑤ Il utilise la distributivité simple pour réduire une expression littérale de la forme  $ax+bx$  où  $a$  et  $b$  sont des nombres décimaux.
- ⑤ Il produit une expression littérale pour élaborer une formule ou traduire un programme de calcul.
- ⑤ Il utilise une lettre pour traduire des propriétés générales et pour démontrer une propriété générale.
- ⑤ Il substitue une valeur numérique à une lettre pour : calculer la valeur d'une expression littérale, tester, à la main ou de façon instrumentée, si une égalité où figurent une ou deux indéterminées est vraie quand on leur attribue des valeurs numériques, contrôler son résultat.
- ④ Il utilise la propriété de distributivité simple pour développer un produit, factoriser une somme ou réduire une expression littérale.
- ④ Il démontre l'équivalence de deux programmes de calcul.
- ④ Il introduit une lettre pour désigner une valeur inconnue et met un problème en équation, teste si un nombre est solution d'une équation, résout algébriquement une équation du premier degré.

## 6. Théorème de Pythagore

- ⑥ Il connaît, reconnaît et sait coder la définition de la médiatrice d'un segment, ainsi que sa caractérisation.
- ⑥ Il sait se servir de la définition de la médiatrice d'un segment ou de sa caractérisation pour la tracer à l'aide des instruments adéquats.
- ④ Il utilise les carrés parfaits de 1 à 144.
- ④ Il connaît la définition de la racine carrée d'un nombre positif.
- ④ Il utilise la racine carrée d'un nombre positif en lien avec des situations géométriques.
- ④ Il utilise la calculatrice pour déterminer une valeur approchée de la racine carrée d'un nombre positif.
- ④ Théorème de Pythagore.

## 7. Fractions

- ⑥ Il ajoute des fractions de même dénominateur.
- ⑥ Il sait utiliser des fractions pour exprimer un quotient. Il comprend que  $b \times \frac{a}{b} = a$
- ⑤ Il reconnaît et produit des fractions égales.
- ⑤ Il traduit un enchaînement d'opérations à l'aide d'une expression avec des parenthèses.
- ⑤ Il effectue mentalement, à la main ou l'aide d'une calculatrice un enchaînement d'opérations en respectant les priorités opératoires.
- ⑤ Il additionne ou soustrait des fractions dont les dénominateurs sont égaux ou multiples l'un de l'autre.
- ④ Il effectue avec des nombres décimaux relatifs, des produits et des quotients.
- ④ Il calcule avec les nombres rationnels : addition, soustraction, multiplication, division.
- ④ Il résout des problèmes avec des nombres rationnels.

## 8. Théorème de Thalès, triangles semblables, agrandissement et réduction

- ④ Egalité des triangles, triangles semblables.
- ④ Théorème de Thalès dans la configuration des triangles emboîtés.
- ④ Il construit un agrandissement ou une réduction d'une figure donnée.

## 9. Puissances de 10

- ④ Il utilise les puissances de 10 d'exposants positifs ou négatifs.
- ④ Il associe, dans le cas des nombres décimaux, écriture décimale, écriture fractionnaire et notation scientifique.
- ④ Il utilise les préfixes de nano à giga.
- ④ Il utilise les ordres de grandeur pour vérifier ses résultats.
- ④ Il utilise les puissances d'exposants strictement positifs d'un nombre pour simplifier l'écriture des produits.
- ④ Il utilise des puissances de 10 pour comparer des nombres.

## 10. Statistiques

- ⑤ Il recueille et organise des données.
- ⑤ Il lit et interprète des données brutes ou présentées sous forme de tableaux, de diagrammes et de graphiques.
- ⑤ Il représente, sur papier ou à l'aide d'un tableur-grapheur, des données sous la forme d'un tableau, d'un diagramme ou d'un graphique.
- ⑤ Il calcule des effectifs et des fréquences.
- ⑤ Il calcule et interprète la moyenne d'une série de données.
- ④ Il lit, interprète et représente des données sous forme de diagrammes circulaires.
- ④ Il calcule et interprète la médiane d'une série de données de petit effectif total.

## 11. Réciproque du théorème de Pythagore

- ④ Réciproque du théorème de Pythagore.

## 12. Solides et volumes

- ⑥ Il connaît la formule de la longueur d'un cercle et l'utilise.
  - ⑥ Il calcule le volume d'un cube ou d'un pavé droit en utilisant une formule.
  - ⑥ Il utilise les unités de volume :  $\text{cm}^3$ ,  $\text{dm}^3$  et  $\text{m}^3$  et leurs relations.
  - ⑥ Il relie les unités de volume et de contenance ( $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$ ;  $1000 \text{ L} = 1 \text{ m}^3$ ).
  - ⑤ Il calcule le périmètre et l'aire des figures usuelles (rectangle, parallélogramme, triangle, disque).
  - ⑤ Il calcule le périmètre et l'aire d'un assemblage de figures.
  - ⑤ Il calcule le volume d'un pavé droit, d'un prisme droit, d'un cylindre.
  - ⑤ Il calcule le volume d'un assemblage de ces solides.
  - ⑤ Il exprime les résultats dans l'unité adaptée.
  - ⑤ Il vérifie la cohérence des résultats du point de vue des unités pour les calculs de durées, de longueurs, d'aires ou de volumes.
- S27  
S28  
S29
- ⑤ Il effectue des conversions d'unités de longueurs, d'aires, de volumes et de durées.
  - ⑤ Il reconnaît des solides (pavé droit, cube, cylindre, prisme droit, pyramide, cône, boule) à partir d'un objet réel, d'une image, d'une représentation en perspective cavalière.
  - ⑤ Il construit et met en relation une représentation en perspective cavalière et un patron d'un pavé droit, d'un cylindre.
  - ④ Il calcule le volume d'une pyramide, d'un cône.
  - ④ Il effectue des conversions d'unités sur des grandeurs composées.
  - ④ Il utilise un rapport d'agrandissement ou de réduction pour calculer, des longueurs, des aires, des volumes.
- 
- ⑤ Il repère sur une droite graduée les nombres décimaux relatifs
  - ⑤ Il se repère dans le plan muni d'un repère orthogonal.
  - ④ Il se repère dans un pavé droit.
  - ④ Il utilise le vocabulaire du repérage : abscisse, ordonnée, altitude.

## 13. Réciproque du théorème de Thalès

- S30 ④ Réciproque du théorème de Thalès dans la configuration des triangles emboîtés.

## 14. Fonctions

- ④ Il produit une formule littérale représentant la dépendance de deux grandeurs.
  - ④ Il représente la dépendance de deux grandeurs par un graphique.
  - ④ Il utilise un graphique représentant la dépendance de deux grandeurs pour lire et interpréter différentes valeurs sur l'axe des abscisses ou l'axe des ordonnées.
- S31

## 15. Cosinus d'un angle aigu

- S32  
S33 ④ Cosinus d'un angle d'un triangle rectangle.

## 16. Probabilités

- ⑤ Il calcule des effectifs et des fréquences.
  - ⑤ Il place un événement sur une échelle de probabilités.
  - ⑤ Il calcule des probabilités dans des situations simples d'équiprobabilité.
  - ④ Il utilise le vocabulaire des probabilités : expérience aléatoire, issues, événement, probabilité, événement certain, événement impossible, événement contraire.
  - ④ Il reconnaît des événements contraires et s'en sert pour calculer des probabilités.
  - ④ Il calcule des probabilités.
  - ④ Il sait que la probabilité d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1.
  - ④ Il exprime des probabilités sous diverses formes.
- S35

**Cette progression n'est qu'indicative.**

**Elle est un guide et un soutien pour l'enseignant qui peut l'adapter en fonction de sa classe.**