DOUBLE DISTRIBUTIVITE – IDENTITES REMARQUABLES

I – Double distributivité

	c	d
a	ac	ad
b	bc	bd

Propriété double distributivité

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Démonstration

$$(a + b)(c + d) = (a + b) \times c + (a + b) \times d = ac + ad + bc + bd$$

Exemples

$(x + 3)(x + 7) = x^2 + 7x + 3x + 21 = x^2 + 10x + 21$

$(x + 5)(x - 4) = x^2 - 4x + 5x - 20 = x^2 + x - 20$

$(x - 4)(x - 6) = x^2 - 6x - 4x + 24 = x^2 - 10x + 24$

$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$

$(x - 8)(x + 3) = x^2 + 3x - 8x - 24 = x^2 - 5x - 24$

$(2x + 3)(3x + 7) = 6x^2 + 14x + 9x + 21 = 6x^2 + 23x + 21$

Exemples complexes

$(x + 5)(x + 4) + (x + 2)(x + 9) = x^2 + 4x + 5x + 20 + x^2 + 9x + 2x + 18 = 2x^2 + 20x + 38$

$(x + 5)(x - 4) + (x - 2)(x - 9) = x^2 - 4x + 5x - 20 + x^2 - 9x - 2x + 18 = 2x^2 - 10x - 2$

$(x + 3)(x - 2) + 5(x - 6)(x + 7) = x^2 - 2x + 3x - 6 + 5 \times (x^2 + 7x - 6x - 42) = x^2 + x - 6 + 5x^2 + 35x - 42x - 210$
$= 6x^2 - 6x - 216$

$(x - 2)(x - 3) - (x - 5)(x + 4) = x^2 - 3x - 2x + 6 - (x^2 + 4x - 5x - 20) = x^2 - 3x - 2x + 6 - x^2 - 4x + 5x + 20 = -4x + 26$

$(2x + 7)(3x - 4) - 8(x + 2)(x - 5) = 6x^2 - 8x + 21x - 28 - 8 \times (x^2 - 5x + 2x - 10)$
$= 6x^2 - 8x + 21x - 28 - 8x^2 + 40x - 16x + 80$
$= -2x^2 + 37x + 52$

II – Identités remarquables

	a	b
a	a^2	ab
b	ab	b^2

Propriété 1ère identité remarquable

❤ $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Démonstration

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Exemples

$(x+3)^2$ = $(x+3)(x+3) = x^2 + 3x + 3x + 9$ = $\mathbf{x^2 + 6x + 9}$

$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

❤ $(a + b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$

$(x + 5)^2 = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$

$(3x + 7)^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 7 + 7^2 = 9x^2 + 42x + 49$

⚠ **Attention**

Dans la réponse, il y a la somme des deux carrés mais il ne faut pas oublier le double

Propriété 2ème identité remarquable

❤ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Démonstration

$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Exemples

$(x - 5)^2 = x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$

❤ $(a - b)^2 = a^2 - 2 \times a \times b + b^2$

$(x - 8)^2 = x^2 - 2 \times x \times 8 + 8^2 = x^2 - 16x + 64$

$(5x - 4)^2 = (5x)^2 - 2 \times 5x \times 4 + 4^2 = 25x^2 - 40x + 16$

Propriété 3ème identité remarquable

♥ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Démonstration

$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

Exemples

$(x + 5)(x - 5) = x^2 - 5^2 = x^2 - 25$

♥ $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$(x + 8)(x - 8) = x^2 - 8^2 = x^2 - 64$

$(5x + 4)(5x - 4) = (5x)^2 - 4^2 = 25x^2 - 16$

$(t - 7)(t + 7) = t^2 - 7^2 = t^2 - 49$

PROBABILITES

Exemple des pièces

On lance une pièce de monnaie. On recommence l'expérience.

Voici les résultats obtenus par des élèves de troisième :

Nombre de piles	Nombre de faces	Total
4 374	4 626	9 000

Définitions

On appelle *effectif total* le nombre de valeurs ou expériences.

Par exemple, la série des pièces a un effectif total de 9 000 car on a effectué 9 000 tirages (4374+4626).

On appelle *effectif de A* le nombre de fois où A apparaît.

Par exemple, pour la série des pièces l'effectif de "pile" est 4374 et l'effectif de "face" est 4626.

On appelle *fréquence de A* le quotient de l'effectif de A par l'effectif total.

$$\textbf{Fréquence de A} = \frac{\textbf{Effectif de A}}{\textbf{Effectif total}}$$

Par exemple, la fréquence de « Pile » est $\frac{4\,374}{9\,000} \approx \mathbf{0,486}$ et la fréquence de « Face » est $\frac{4\,626}{9\,000} \approx \mathbf{0,514}$.

Remarque

Les fréquences sont souvent exprimées en pourcentage.

Méthode 1	Méthode 2	Méthode 3
$\mathbf{0,486} = \frac{\mathbf{48,6}}{\mathbf{100}}$	<table><tr><td>Pile</td><td>4 374</td><td>?</td></tr><tr><td>Total</td><td>9 000</td><td>100</td></tr></table> $? = \frac{\mathbf{4\,374} \times}{\mathbf{9\,000}}$ $? = \frac{\mathbf{4\,374} \times \mathbf{100}}{\mathbf{9\,000}} \approx \mathbf{48,6}$	$\textbf{Fréquence de A en \%} = \frac{\textbf{Effectif de A}}{\textbf{Effectif total}} \times \mathbf{100}$ $\textbf{Fréquence de "pile" en \%} = \frac{\mathbf{4\,374}}{\mathbf{9\,000}} \times \mathbf{100} \approx \mathbf{48,6}$

La fréquence de « Pile » est d'environ 48,6%.

Définitions

Une expérience est dite *aléatoire* si on ne peut pas prévoir l'issue de cette expérience.

Les différents résultats d'une expérience sont appelés les *issues*.

Exemple des pièces

Les issues possibles sont "pile" ou "face". On a une chance sur deux d'obtenir une des deux issues. Elles ont la même probabilité de survenir. On dira que la probabilité d'obtenir "pile" est $\frac{1}{2}$ et que la probabilité d'obtenir "face" est $\frac{1}{2}$.

On notera p(Pile) = $\frac{1}{2}$ et p(Face) = $\frac{1}{2}$.

p comme probabilité

Remarque importante

Si on effectue de "nombreux" tirages, la fréquence d'apparition d'une issue se rapproche de la valeur théorique que l'on appelle probabilité.

Exemple des pièces reproduit sur ordinateur

Nombre de tirages	10	50	100	500	1000	5000	10000	50000	100000	1000000
Nombre de "Pile"	2	23	46	240	494	2470	4908	24853	49914	500 557
Fréquence de "Pile" en %	20	46	46	48	49,4	49,4	49,08	49,706	49,914	50, 0557
Ecart avec la probabilité	30	4	4	2	0,6	0,6	0,92	0,294	0,086	0,0557

Exemple des dés

On tire deux dés et on effectue leur somme.

Les issues possibles sont : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 et 12.

On a répété de nombreuses fois l'expérience en 3ème.

Voici les résultats de l'expérience :

Somme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
Effectif	73	156	223	335	410	445	367	288	208	182	101	2788
Fréquence en %	2,62 %	5,60 %	8,00 %	12,02 %	14,71 %	15,96 %	13,16 %	10,33 %	7,46 %	6,53 %	3,62 %	100 %

Les issues n'apparaissent pas avec la même fréquence.

Le premier dé a 6 issues possibles et le second aussi. Au total, il y a 6×6 issues possibles pour la somme ... mais certaines sont identiques :

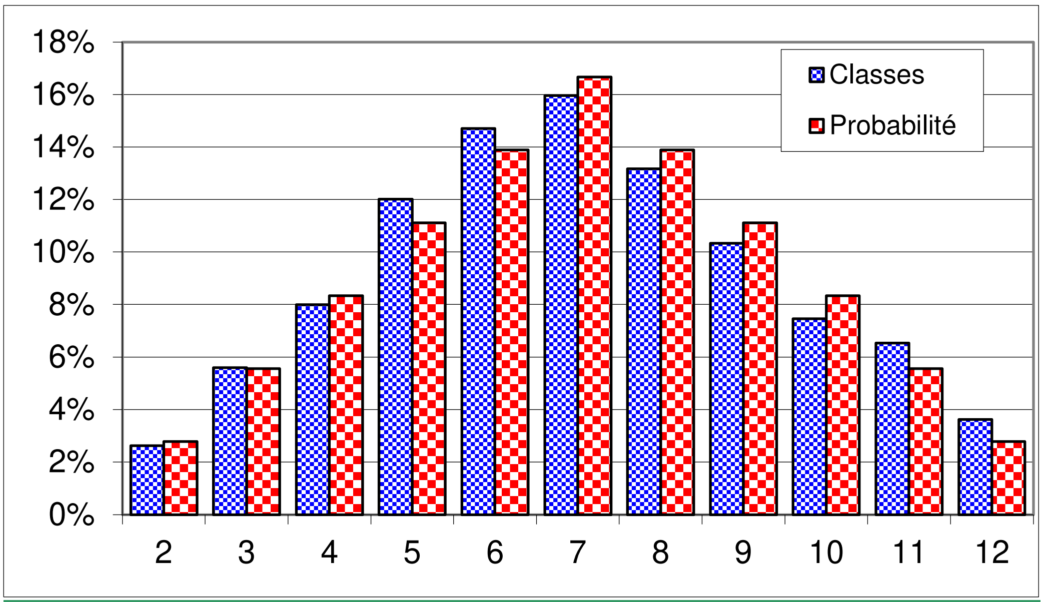
+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$p(2) = p(12) = 1/36 \approx 2{,}8\%$ $\quad$ $p(3) = p(11) = 2/36 \approx 5{,}6\%$

$p(4) = p(10) = 3/36 \approx 8{,}3\ \%$ $\quad$ $p(5) = p(9) = 4/36 \approx 11{,}1\%$

$p(6) = p(8) = 5/36 \approx 13{,}9\ \%$ $\quad$ $p(7) = 6/36 \approx 16{,}7\%$

Somme	Issues possibles dé rouge + dé vert	Nombre d'issues possibles	Probabilité
2	1+1	1	1/36 ≈ 2,8%
3	1+2=2+1	2	2/36 ≈ 5,6%
4	1+3=2+2=3+1	3	3/36 ≈ 8,3 %
5	1+4=2+3=3+2=4+1	4	4/36 ≈ 11,1%
6	1+5=2+4=3+3=4+2=5+1	5	5/36 ≈ 13,9%
7	1+6=2+5=3+4=4+3=5+2=6+1	6	6/36 ≈ 16,7%
8	2+6=3+5=4+4=5+3=6+2	5	5/36 ≈ 13,9%
9	3+6=4+5=5+4=6+3	4	4/36 ≈ 11,1%
10	4+6=5+5=6+4	3	3/36 ≈ 8,3%
11	5+6=6+5	2	2/36 ≈ 5,6%
12	6+6	1	1/36 ≈ 2,8%
Total		36	1



Propriété admise

La somme des probabilités de toutes les issues possibles est toujours 1.

Définitions

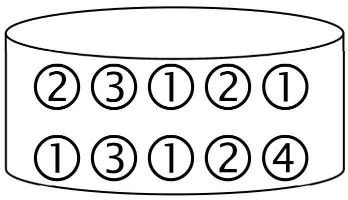
Un *événement* est constitué d'une (ou plusieurs) issue(s) d'une expérience aléatoire ; on dit qu'une de ces issues réalise l'évènement.

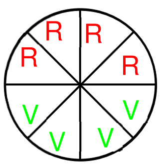
Deux événements sont dits *incompatibles* s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps.

Exemple des dés

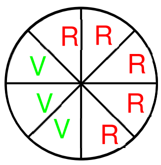
- Soit A l'événement "on obtient un résultat strictement inférieur à 5".
  Les issues qui réalisent cet événement sont 2, 3 et 4.
  p(A) = $\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ *On ajoute les probabilités car les issues sont incompatibles.*
- Soit B l'événement "on obtient un nombre pair".
  Les issues qui réalisent cet événement sont 2, 4, 6, 8, 10 et 12.
  p(B) = $\frac{1}{36}+\frac{3}{36}+\frac{5}{36}+\frac{5}{36}+\frac{3}{36}+\frac{1}{36}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$
- Soit C l'événement "on obtient un nombre impair".
  Les issues qui réalisent cet événement sont 3, 5, 7, 9 et 11
  p(C) = $\frac{2}{36}+\frac{4}{36}+\frac{6}{36}+\frac{4}{36}+\frac{2}{36}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$

Exemple d'expérience à deux épreuves





roue A



roue B

Une urne contient des boules numérotées de 1 à 4.

On tire une boule au hasard et on lit la valeur de la boule.

Si la boule est paire, on tourne la roue A ; si la boule est impaire, on tourne la roue B. Les roues sont colorées en rouge et vert.

Dans l'urne, les issues possibles sont 1, 2, 3 ou 4.

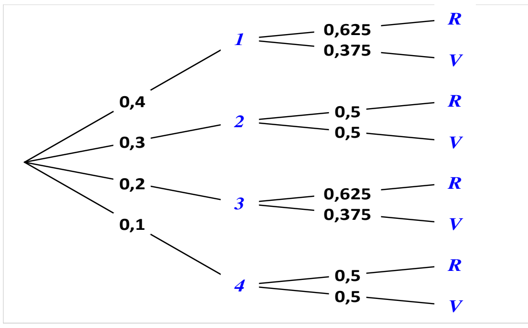
Valeur de la boule	1	2	3	4	Total
Effectif	4	3	2	1	10

On a p(1) = $\frac{4}{10}$ = 0,4 et p(2) = $\frac{3}{10}$ = 0,3 et p(3) = $\frac{2}{10}$ = 0,2 et p(4) = $\frac{1}{10}$ = 0,1.

Sur la roue A, on a p(R) = $\frac{4}{8}$ = 0,5 et p(V) = $\frac{4}{8}$ = 0,5.

Sur la roue B, on a p(R) = $\frac{5}{8}$ = 0,625 et p(V) = $\frac{3}{8}$ = 0,375.

On peut représenter l'ensemble de ces résultats par un arbre :



Définitions

Deux événements sont dits *contraires* si la somme de leur probabilité vaut 1.

Le contraire de l'événement A est noté $\overline{\mathbf{A}}$.

L'événement contraire de « il pleut » est « il ne pleut pas »

Un événement est dit *certain* si sa probabilité vaut 1.

Exemple de l'expérience à deux épreuves

Soit A l'évènement "obtenir 1 et rouge".
p(A) = 0,4 × 0,625 = 0,25

Soit B l'évènement "obtenir 2 et rouge".
p(B) = 0,3 × 0,5 = 0,15

Soit C l'évènement "obtenir 3 et rouge".
p(C) = 0,2 × 0,625 = 0,125

Soit D l'évènement "obtenir 4 et rouge".
p(D) = 0,1 × 0,5 = 0,05

Comme A, B, C et D sont incompatibles, alors p(R) = p(A) + p(B) + p(C) + p(D),
donc p(R) = 0,25 + 0,15 + 0,125 + 0,05 = 0,575.

Soit V l'événement "obtenir vert".

V et R sont contraires donc V = $\overline{\mathbf{R}}$

donc p(V) = p($\overline{\mathbf{R}}$) = 1 - p(R) = 1 - 0,575 = 0,425

Exemple de problème

- On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir un cœur ? un roi ? un roi de cœur ?

- Soit A l'événement "tirer un cœur".

  p(A) = $\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{32}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$

  Soit B l'événement "tirer un roi".

  p(B) = $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{32}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}$

  Soit C l'événement "tirer un roi de cœur".

  p(C) = $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{32}}$

  ou p(C) = p(A) × p(B) = $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{32}}$

Exemple des anniversaires

On cherche quelle est la probabilité que, au moins, deux personnes d'un groupe fêtent leur anniversaire le même jour.

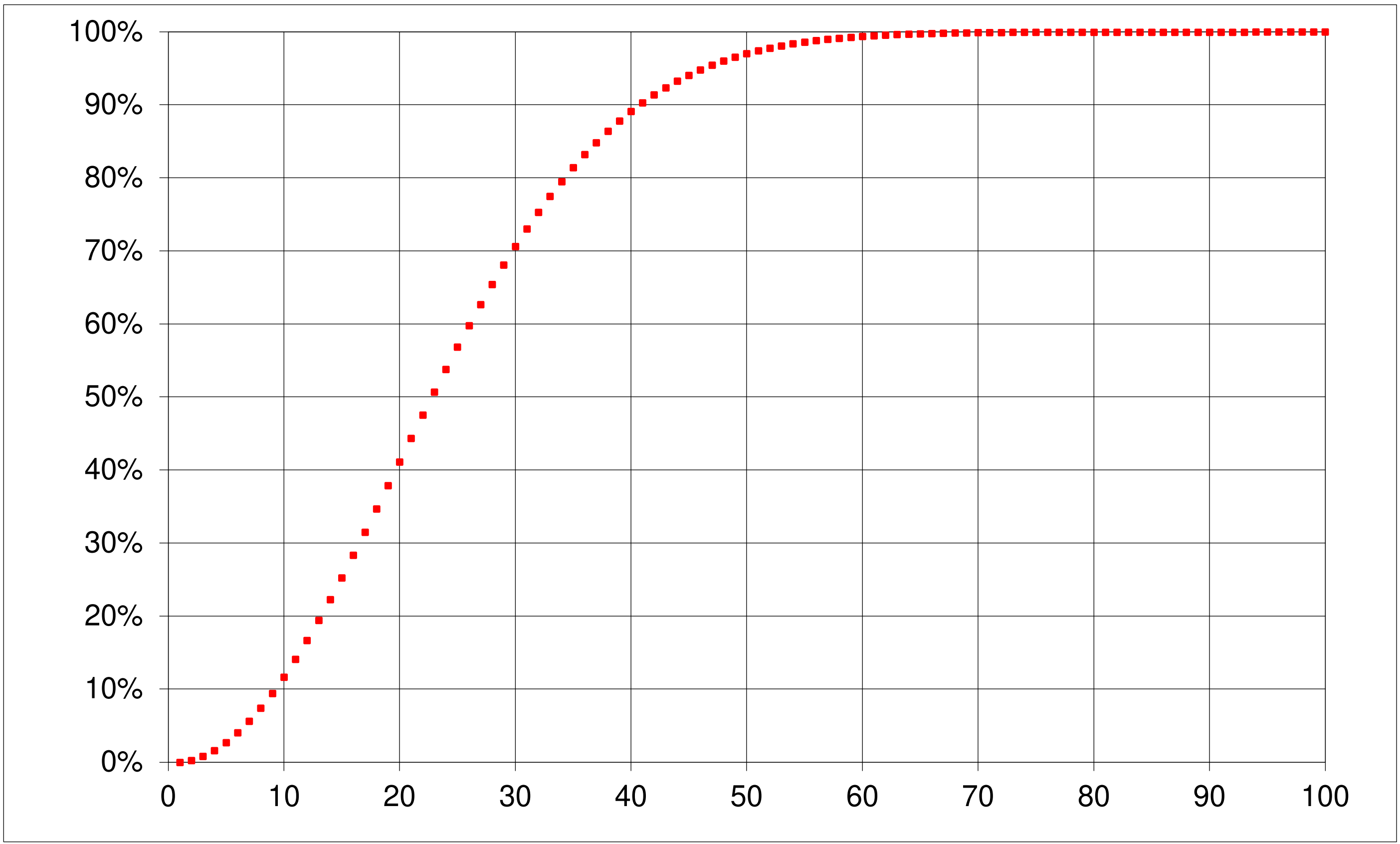
On appelle A l'événement « les personnes ont des anniversaires à des jours tous différents » et B l'événement « au moins 2 personnes fêtent leur anniversaire le même jour ».

A et B sont contraires donc p(B) = 1 – p(A).

Pour la 1$^{\text{ère}}$ personne, on a 365 jours possibles pour son anniversaire sur les 365 de l'année.
Pour la 2$^{\text{nde}}$ personne, on a 364 jours possibles pour son anniversaire sur les 365 de l'année.
Pour la 3$^{\text{ème}}$ personne, on a 363 jours possibles pour son anniversaire sur les 365 de l'année.
Pour la 4$^{\text{ème}}$ personne, on a 362 jours possibles pour son anniversaire sur les 365 de l'année.

Nombre de personnes	*p*(A)	*p*(B)
1	$\frac{365}{365} = 1$	1-1 = 0%
2	$\frac{365}{365} \times \frac{364}{365} = \frac{132860}{133225}$	$1 - \frac{132860}{133225} = \frac{1}{365} \approx$ 0,27 %
3	$\frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} = \frac{48228180}{48627125}$	$1 - \frac{48228180}{48627125} = \frac{398645}{48627125} \approx$ 0,82 %
4	$\frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} = \frac{17458601160}{17748900625}$	$1 - \frac{17458601160}{17748900625} = \frac{290299465}{17748900625} \approx$ 1,64 %
5	97,29%	2,71%
6	95,95%	4,05%
7	94,38%	5,62%
8	92,57%	7,43%
9	90,54%	9,46%
10	88,31%	11,69%
11	85,89%	14,11%
12	83,30%	16,70%
13	80,56%	19,44%
14	77,69%	22,31%
15	74,71%	25,29%
16	71,64%	28,36%
17	68,50%	31,50%
18	65,31%	34,69%
19	62,09%	37,91%
20	58,86%	41,14%
21	55,63%	44,37%
22	52,43%	47,57%
23	49,27%	50,73%
24	46,17%	53,83%
25	43,13%	56,87%
26	40,18%	59,82%
27	37,31%	62,69%
28	34,55%	65,45%
29	31,90%	68,10%
30	29,37%	70,63%

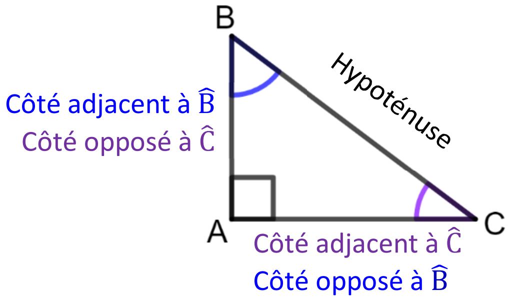
40	10,88%	89,12%
50	2,96%	97,04%
60	0,59%	99,41%
70	0,08%	99,92%
80	0,01%	99,99%
90	0,00%	100,00%



Triangles rectangles : TRIGONOMETRIE

Premier temps : le mathématicien indien Âryabhata (VI[e] siècle) utilise le mot jîva qui signifie corde.
Deuxième temps : le mathématicien arabe Al-Fazzârî (VIII[e] siècle) arabise ce mot en jîba, mot n'ayant pas de signification en arabe.
Troisième temps : Gérard de Crémone (XII[e] siècle) confond jîba avec jaîb, d'autant plus facilement qu'en arabe, les voyelles sont parfois omises ; or jaîb signifie « poche, cavité » et il le traduit naturellement en latin par sinus...
Quant au cosinus, c'est tout simplement le sinus du complémentaire (de l'angle) ; « co- » vient du latin cum, qui signifie « avec ».
La tangente, elle, vient de ce qu'elle mesure une portion d'une tangente au cercle trigonométrique.

Définitions



Préliminaire

Dans un triangle rectangle, les rapports suivants ne dépendent que de la mesure de l'angle et non de celles des côtés :

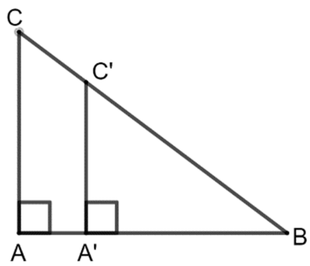
- Côté adjacent à l'angle aigu sur l'hypoténuse
- Côté opposé à l'angle aigu sur l'hypoténuse
- Côté opposé sur côté adjacent du même angle aigu.

On les appelle respectivement cosinus, sinus et tangente de l'angle aigu.

Démonstration

Comme (A'C') et (AC) sont perpendiculaires à (AB) alors (AC)//(A'C').
Comme (AC)//(A'C') et comme B, A', A et B, C', C sont alignés, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{\mathbf{BA'}}{\mathbf{BA}} = \frac{\mathbf{BC'}}{\mathbf{BC}} = \frac{\mathbf{A'C'}}{\mathbf{AC}}$$



BA' × BC = BC' × BA
÷BC' ÷BC ÷BC' ÷BC

donc $\frac{\mathbf{BA'}}{\mathbf{BC'}} = \frac{\mathbf{BA}}{\mathbf{BC}}$ = cosinus de l'angle $\widehat{B}$

BC' × AC = BC × A'C'
÷BC' ÷BC ÷BC ÷BC'

donc $\frac{\mathbf{AC}}{\mathbf{BC}} = \frac{\mathbf{A'C'}}{\mathbf{BC'}}$ = sinus de l'angle $\widehat{B}$

BA' × AC = BA × A'C'
÷BA' ÷BA ÷BA ÷BA'

donc $\frac{\mathbf{AC}}{\mathbf{BA}} = \frac{\mathbf{A'C'}}{\mathbf{BA'}}$ = tangente de l'angle $\widehat{B}$

Propriété

Dans un triangle rectangle :

- Le cosinus d'un angle aigu est le quotient du côté adjacent à cet angle par l'hypoténuse.
- Le sinus d'un angle aigu est le quotient du côté opposé à cet angle par l'hypoténuse.
- La tangente d'un angle aigu est le quotient du côté opposé à cet angle par son côté adjacent.

⚠ **Comment** se rappeler des formules ?

Méthode 1 : ♥ **SOH CAH TOA** Sin = Opposé / Hypoténuse Cos = Adjacent / Hypoténuse Tan = Opposé / Adjacent

Méthode 2 : ♥ **CAH SOH TOA** Cos = Adjacent / Hypoténuse Sin = Opposé / Hypoténuse Tan = Opposé / Adjacent

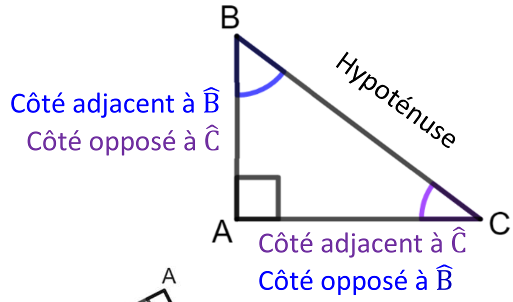
Méthode 3 :

♥ **COS ADJ HYP**	♥ **SIN OPP HYP**	♥ **TANG OPPADJ**
COSinus = ADJacent / HYPoténuse	SINus = OPPosé / HYPoténuse	TANGente = OPPosé / ADJacent

Formules

$\cos(\widehat{B}) = \frac{AB}{BC}$ $\sin(\widehat{B}) = \frac{AC}{BC}$ $\tan(\widehat{B}) = \frac{AC}{AB}$

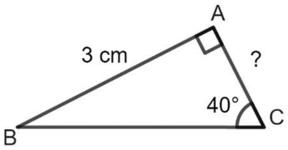
$\cos(\widehat{C}) = \frac{AC}{BC}$ $\sin(\widehat{C}) = \frac{AB}{BC}$ $\tan(\widehat{C}) = \frac{AB}{AC}$



Exemple de recherche d'un côté

Enoncé

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 3 cm et $\widehat{ACB}$ = 40°.
Calcule AC ; *donne une valeur approchée au centième près.*



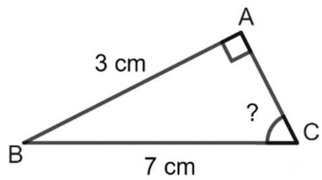
Réponse

Dans ABC rectangle en A	On cite le triangle rectangle
On connait : • $\widehat{C}$ • AB : opposé On cherche : • AC : adjacent	On identifie l'angle connu, le côté connu et le côté cherché.
La formule doit contenir opposé et adjacent ; on va utiliser la tangente	On cherche la formule qui comprend ces informations.
$\tan(\widehat{C}) = \frac{AB}{AC}$	On écrit la formule avec les « lettres » en veillant bien à placer les numérateurs et dénominateurs au « bon » endroit.
$\tan(40°) = \frac{3}{AC}$	On remplace les valeurs connues
$\frac{\tan(40°)}{1} = \frac{3}{AC}$	On transforme l'écriture pour obtenir deux fractions égales
$AC = \frac{3 \times 1}{\tan(40°)} \approx 3,58\ \mathbf{cm}$	On effectue les produits en croix On donne une valeur approchée On n'oublie pas l'unité

Exemple de recherche d'un angle

Enoncé

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 3 cm et $BC = 7\ \mathbf{cm}$.
Calcule $\widehat{C}$; *donne une valeur approchée au degré près.*



Réponse

Dans ABC rectangle en A $\sin(\widehat{C}) = \frac{AB}{BC}$ $\sin(\widehat{C}) = \frac{3}{7}$ $\widehat{C} = \arcsin\left(\frac{3}{7}\right) \approx 25°$	On cherche : • $\widehat{C}$ On connait : • BC : hypoténuse • AB : opposé La formule doit contenir opposé et hypoténuse ; on va utiliser le sinus

Utilisation de la calculatrice

CASIO FX92 et CASIO FX92 classwiz	
Pour calculer $\frac{3\times1}{\tan(40°)}$, je tape	Pour calculer $\mathbf{arcsin}\left(\frac{3}{7}\right)$, **je tape**
[fraction] 3 [×] 1 [▼] [tan] 40 [)] [EXE]	[SHIFT] [sin] 3 [÷] 7 [)] [EXE]

FACTORISER, équations produits

Définition

Factoriser, c'est transformer une somme en un produit.

Développer, c'est transformer un produit en une somme.

Exemples

Développer	Développer	Développer
$(x+3)(x+2) = x^2 + 5x + 6$	$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$	$(x+5) \times (x-5) = x^2 - 25$
Factoriser	Factoriser	Factoriser

Remarque

Il est toujours possible de développer, mais il n'est pas toujours possible de factoriser.

Comment factoriser en reconnaissant un facteur commun ?	Exemple
On coupe l'expression en « blocs » séparés par les additions et les soustractions. On ne coupe pas en 2 une parenthèse.	$5x + 3x$
On reconnait (ou on fait apparaitre) un facteur commun dans une expression. On peut souligner le facteur commun.	$= 5\times\underline{x} + 3\times\underline{x}$
On isole ce facteur commun en utilisant la propriété de simple distributivité : $k\times a + k\times b = k\times(a+b)$. Dans la parenthèse on place alors tout ce qui n'a pas été souligné.	$= x\times(5+3)$ $= 8x$

Exemples

$5x^2 - 3x + 2xy = 5\,\underline{x}\,x - 3\,\underline{x} + 2\,\underline{x}\,y = x\,(5x - 3 + 2y)$

$\underline{(5x+3)}(2x-7) + \underline{(5x+3)}(4x+5)$ $= (5x+3)[(2x-7)+(4x+5)]$ $= (5x+3)[2x-7+4x+5]$ $= (5x+3)(6x-2)$	$\underline{(7x-2)}(2x-7) - (5x+4)\underline{(7x-2)}$ $= (7x-2)[(2x-7)-(5x+4)]$ $= (7x-2)[2x-7-5x-4]$ $= (7x-2)(-3x-11)$
$\underline{(3x+4)}(5x-2) + 7\,\underline{(3x+4)}(4x+5)$ $= (3x+4)[(5x-2)+7(4x+5)]$ $= (3x+4)[5x-2+28x+35]$ $= (3x+4)(33x+33)$	$\underline{(3x+4)}(5x-2) - 7\,\underline{(3x+4)}(4x+5)$ $= (3x+4)[(5x-2)-7(4x+5)]$ $= (3x+4)[5x-2-28x-35]$ $= (3x+4)(-23x-37)$

Exemple complexe

$(3x+5)(x-2) + 3\,(5x-10)$ ↓ $5x - 10 = \underline{5}\times x - \underline{5}\times 2 = \underline{5}\,(x-2)$

$= (3x+5)\,\underline{(x-2)} + 3\times 5\,\underline{(x-2)}$

$= (x-2)[(3x+5) + 3\times 5]$

$= (x-2)[3x+5+15]$

$= (x-2)(3x+20)$

Remarque

Si on ne trouve pas de facteur commun, on essaye la méthode ci-dessous.

Comment factoriser en reconnaissant une différence de 2 carrés ?

1. On transforme, si possible, l'expression en une différence de deux carrés.
2. On factorise en utilisant la propriété $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Exemples

$x^2 - 9 \;=\; x^2 - 3^2 = (x+3)(x-3)$

$\qquad\qquad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x+5)(2x-5)$

$(3x+5)^2 - 49 = (3x+5)^2 - 7^2 = [(3x+5)+7]\,[(3x+5)-7] = [3x+5+7]\,[3x+5-7] = (3x+12)(3x-2)$

$(3x+5)^2 - (7x-6)^2 = [(3x+5)+(7x-6)]\,[(3x+5)-(7x-6)] = [3x+5+7x-6]\,[3x+5-7x+6] = (10x-1)(-4x+11)$

Remarque

Si on ne trouve pas de différence de deux carrés, on essaye la méthode ci-dessous.

Comment factoriser en reconnaissant le développement de la 1ère ou 2ème identité remarquable ?

1. On identifie l'identité remarquable.
2. On identifie les deux « carrés ».
3. On vérifie que le double produit est le bon.
4. On factorise en utilisant une des propriétés : $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ *ou* $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Exemple

On veut factoriser $x^2 + 6x + 9$.

Il y a trois termes et cela ressemble au développement de la première identité remarquable : $a^2 + 2ab + b^2$.
On identifie x^2 et 9 comme les carrés de x et 3.
On calcule $2 \times x \times 3 = 6x$ et on reconnait le morceau non choisi de l'expression.
On conclue : $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = (x + 3)^2$

Exemples

$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$	$x^2 - 14x + 49 = (x - 7)^2$
x^2 est le carré de x 25 est le carré de 5 Il y a un « + » devant le double produit. On vérifie que $2 \times x \times 5$ est bien égal au troisième terme $10x$	x^2 est le carré de x 49 est le carré de 7 Il y a un « - » devant le double produit. On vérifie que $2 \times x \times 7$ est bien égal au troisième terme : $14x$

$16x^2 + 24x + 9 = (4x + 3)^2$

Remarque

On veut factoriser $x^2 + 7x + 49$
x^2 et 49 sont les carrés de x et 7
On calcule $2 \times x \times 7 = 14x$. On ne trouve pas $7x$
On ne peut pas factoriser $x^2 + 7x + 49$ avec cette méthode.

Propriété équation produit - admise

♥ Un produit est nul si et seulement si l'un, au moins, des facteurs est nul.

Exemple

On veut résoudre l'équation $(2x + 5)(5x - 3) = 0$

$(2x + 5)(5x - 3) = 0$	On réécrit l'équation
Un produit est nul si et seulement si l'un, au moins, des facteurs est nul.	On cite la propriété
$2x + 5 = 0$ | $5x - 3 = 0$ $2x = -5$ | $5x = 3$ $x = -2,5$ | $x = 0,6$	On résout séparément les équations. Bien laisser le trait vertical.
Si $x = -2,5$ alors $(2x + 5)(5x - 3)$ $= (2\times(-2,5) + 5) \times (5\times(-2,5) - 3)$ $= 0$ Si $x = 0,6$ alors $(2x + 5)(5x - 3)$ $= (2\times0,6 + 5) \times (5\times0,6 - 3)$ $= 0$	On vérifie en testant si les nombres trouvés sont solution de l'équation
Les solutions de l'équation sont -2,5 et 0,6. On peut aussi écrire : $S = \{-2,5 ; 0,6\}$	On conclue par une phrase

Remarques

Pour utiliser cette propriété, il faut que l'on ait un produit.
Pour cela, il peut être nécessaire de factoriser l'expression ; c'est même le principal intérêt de la factorisation.

Propriété

L'équation $x^2 = a$ admet :

- aucune solution si $a < 0$.
- une seule solution si $a = 0$; la solution est 0.
- deux solutions si $a > 0$; les solutions sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Démonstration

Si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution car un carré ne peut pas être négatif.

Si $a > 0$ on a alors : $a = \sqrt{a}^2$

L'équation $x^2 = a$ devient $x^2 = \sqrt{a}^2$ soit $x^2 - \sqrt{a}^2 = 0$ soit $(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) = 0$

Or « un produit est nul si et seulement si l'un, au moins, des facteurs est nul »,

$$\begin{array}{l|l} x + \sqrt{a} = 0 & x - \sqrt{a} = 0 \\ x = -\sqrt{a} & x = \sqrt{a} \end{array}$$

Exemples

L'équation $x^2 = -4$ n'a pas de solution car $-4 < 0$.

L'équation $x^2 = 0$ a une seule solution 0.

L'équation $x^2 = 64$ a deux solutions : $\sqrt{64}$ et $-\sqrt{64}$ soit 8 et -8.

L'équation $x^2 = 11$ a deux solutions : $\sqrt{11}$ et $-\sqrt{11}$.

Exemple complexe

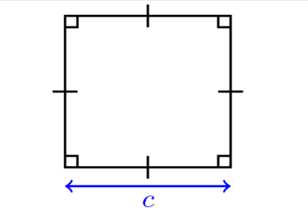
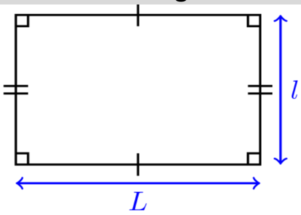
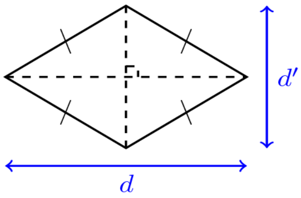
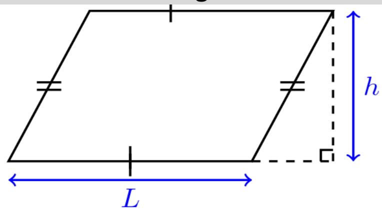
Résoudre l'équation $(x + 3)^2 = 7$.

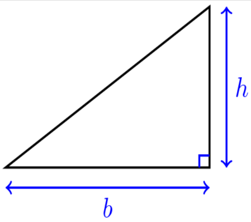
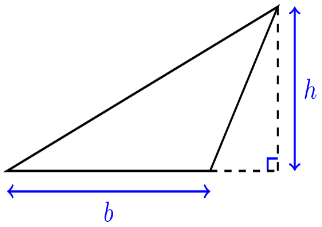
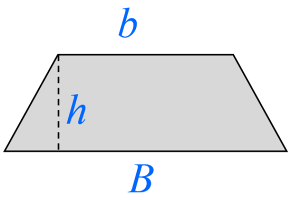
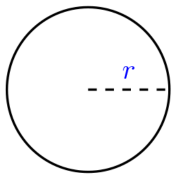
$$(x + 3)^2 = 7$$

$$\begin{array}{l|l} x + 3 = \sqrt{7} & x + 3 = -\sqrt{7} \\ x = -3 + \sqrt{7} & x = -3 - \sqrt{7} \end{array}$$

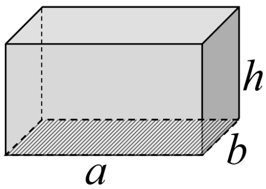
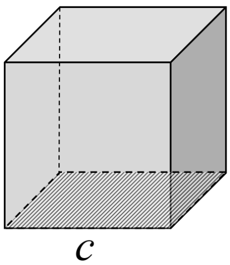
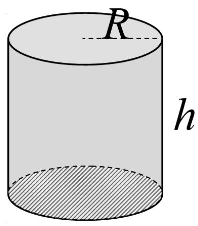
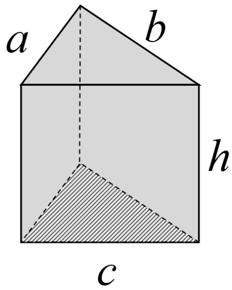
Les solutions sont $-3 + \sqrt{7}$ et $-3 - \sqrt{7}$

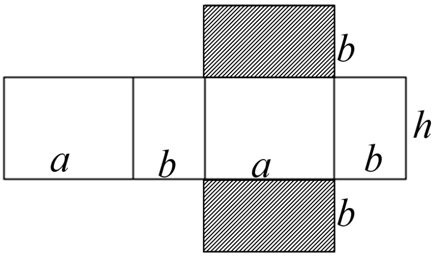
I – Rappel sur les aires

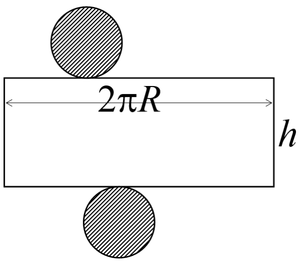
Carré	Rectangle	Losange	Parallélogramme
			
A = c^2	A = $L \times l$	A = $d \times d' \div 2$	A = $b \times h$

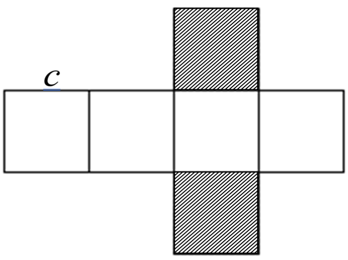
Triangle rectangle	Triangle quelconque	Trapèze	Disque
			
$\mathbf{A} = \dfrac{\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{h}}{\mathbf{2}}$		$\mathbf{A} = \dfrac{(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{h}}{\mathbf{2}}$	A = $\pi \times r^2$

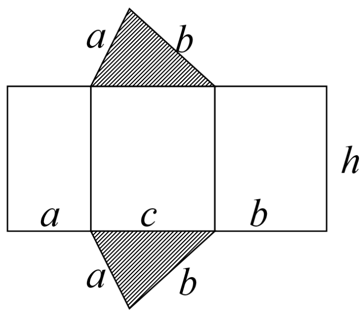
II – La famille des prismes

Parallélépipède rectangle Pavé droit	Cube	Cylindre	Prisme droit
			
♥ Volume = Aire de la base × hauteur			
V = $a \times b \times h$	V = $c \times c \times c = c^3$	V = $\pi \times R^2 \times h$	V = aire triangle × h

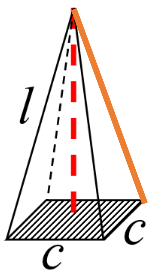
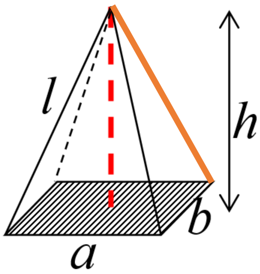
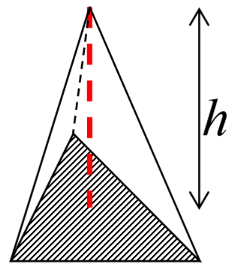
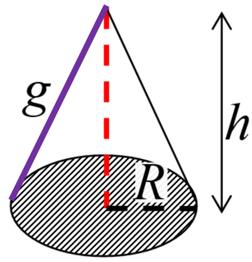


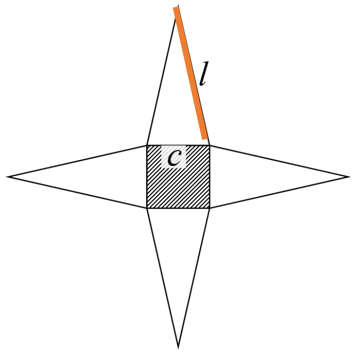


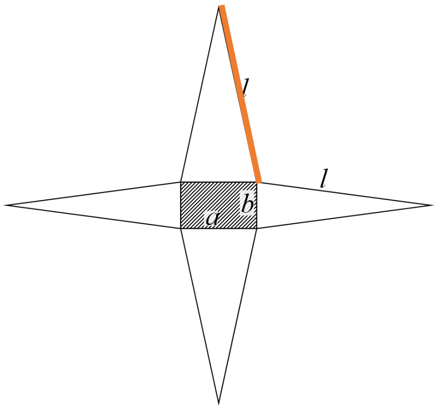


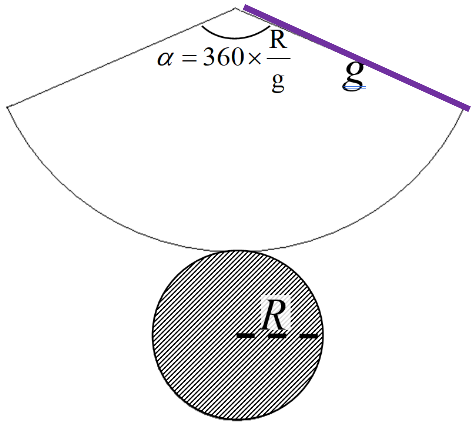


III – La famille des pyramides

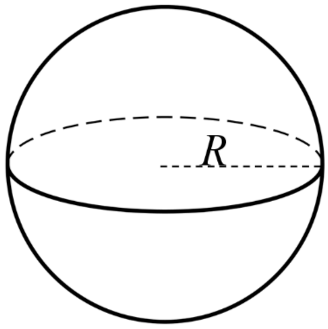
Pyramide régulière	Pyramide	Tétraèdre	Cône
			
♥ $\textbf{Volume} = \dfrac{\textbf{Aire de la base} \times \textbf{hauteur}}{\textbf{3}}$			
$\mathbf{V} = \dfrac{c^2 \times h}{3}$	$\mathbf{V} = \dfrac{a \times b \times h}{3}$	$\mathbf{V} = \dfrac{aire\ triangle \times h}{3}$	$\mathbf{V} = \dfrac{\pi \times R^2 \times h}{3}$







IV – La boule et la sphère



Définition

La *boule* est l'intérieur.

La *sphère* est l'extérieur, l'enveloppe

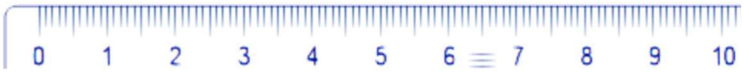
Formules

$\textbf{Volume} = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3$ $\textbf{Aire} = 4 \times \pi \times R^2$

V – Conversions

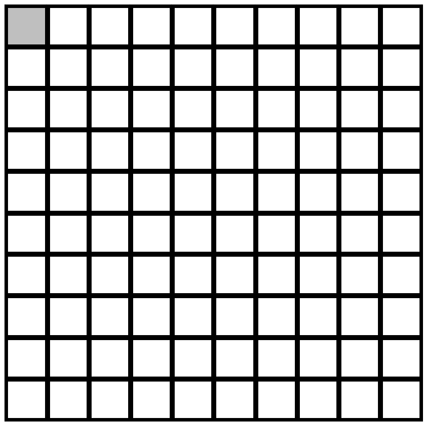
Longueurs

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
					1	0



Aires

	km^2		hm^2		dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2
			ha		*a*		*ca*						
							1	0	0				
					3	5	0 ,						
		7	0										

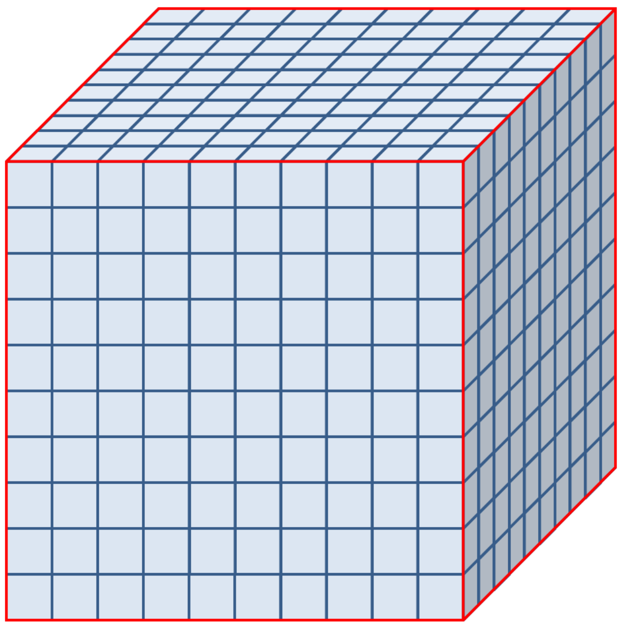


1 ha se lit « un hectare »
1 a se lit « un are »
1 ca se lit « un centiare »

Volumes

		km^3			hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			mm^3
												hL	daL	L	dL	cL	mL			
											1	0	0	0						
													1	5,	3	4				
														2,	4	5	4			

1 dm^3 = 1L



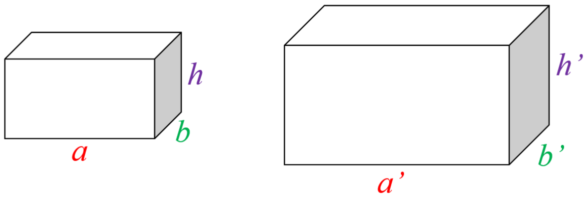
VI – Agrandissements / réductions

Propriété admise

Si une figure est un agrandissement (ou une réduction) d'une autre figure de rapport k :

- les distances sont multipliées par k,
- les aires sont multipliées par k^2,
- les volumes sont multipliés par k^3.

Démonstration dans le cas des pavés droits.



Si le pavé de droite est un agrandissement du pavé gauche de coefficient *k*, alors on a :

$a' = k \times a$, $b' = k \times b$, et $h' = k \times h$.

Le volume du pavé de gauche est $V = a \times b \times h$

Le volume du pavé de droite est $V' = a' \times b' \times h'$

$V' = a' \times b' \times h' = k \times a \times k \times b \times k \times h = k^3 \times a \times b \times h = k^3 \times V$

Comment calculer le coefficient d'agrandissement-réduction ?

1. On repère une distance connue sur les 2 solides.
2. On calcule le coefficient par la formule :

$$\mathbf{k} = \frac{\textit{distance sur le solide d'arrivée}}{\textit{distance correspondante sur le solide de départ}}$$

Pour trouver le coefficient d'agrandissement-réduction, on repère une longueur connue sur le solide de départ et sur le solide d'arrivée.

Exemple 1

On donne une pyramide régulière de base ABCD et de sommet S.

On donne AB = 12 cm et OS = 21cm.

1°) Calculer le volume de SABCD.

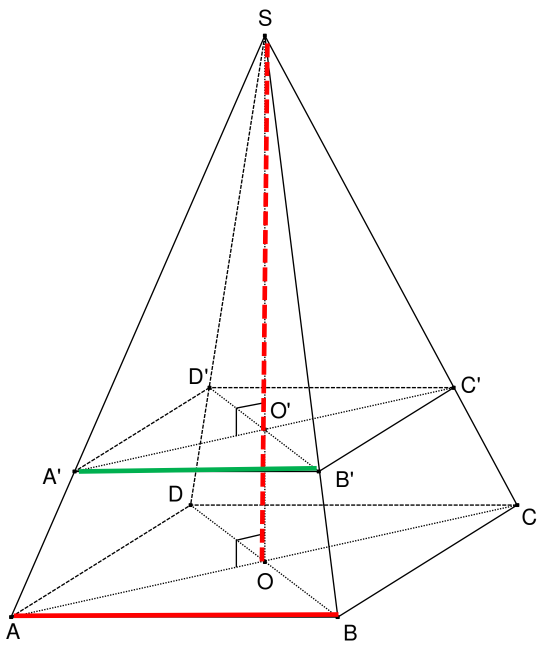
2°) On coupe cette pyramide par un plan parallèle à la base ABCD.

On obtient une réduction SA'B'C'D'.

On donne A'B' = 9 cm.

Calculer le rapport de réduction.

En déduire le volume de SA'B'C'D'.



1°) Soit V le volume de SABCD.

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{AB} \times \mathbf{BC} \times \mathbf{SO}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{12} \times \mathbf{12} \times \mathbf{21}}{\mathbf{3}} = \mathbf{1008}$$

Le volume de la pyramide SABCD est $\boxed{1008\text{ cm}^3}$.

2°) Soit k le coefficient de réduction de SABCD vers SA'B'C'D'.

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{A'B'}}{\mathbf{AB}} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{12}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} = \mathbf{0,75}$$

Soit V' le volume de SA'B'C'D'.

$$\mathbf{V'} = \mathbf{k^3} \times \mathbf{V} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \mathbf{1008} = \mathbf{425,25}$$

Le volume de SA'B'C'D' est $\boxed{425{,}25\text{ cm}^3}$.

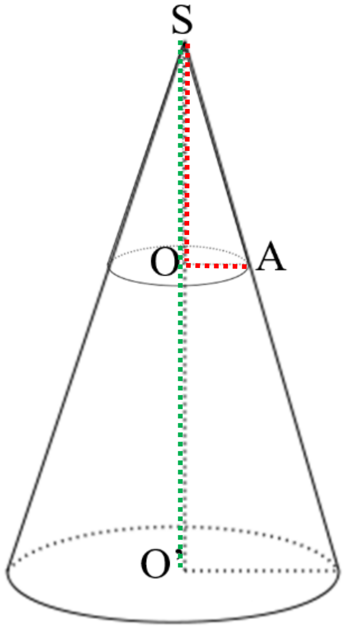
Exemple 2

Sur la figure suivante, on donne les informations suivantes :

- *SO = 6 cm*
- *AO = 5 cm*
- *SO' = 15 cm.*

Calculer le volume du grand cône.

On donnera le volume en litre, arrondi au millilitre près.



Soit V le volume du petit cône.

$$\mathbf{V} = \frac{\pi \times \mathbf{R^2} \times \mathbf{h}}{\mathbf{3}} = \frac{\pi \times \mathbf{OA^2} \times \mathbf{OS}}{\mathbf{3}} = \frac{\pi \times \mathbf{5^2} \times \mathbf{6}}{\mathbf{3}} = \mathbf{50\pi\ cm^3}$$

Soit k le coefficient d'agrandissement du petit vers le grand cône.

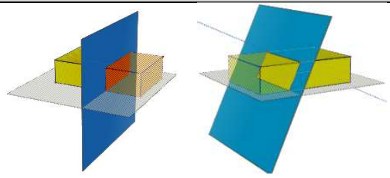
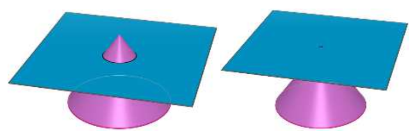
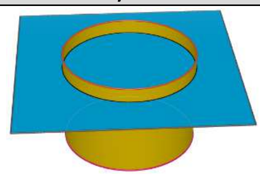
$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{SO'}}{\mathbf{SO}} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{6}} = \mathbf{2,5}$$

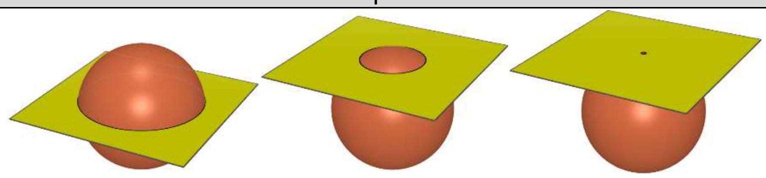
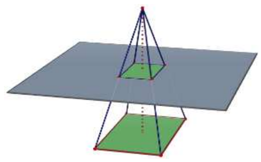
Soit V' le volume du grand cône.

$$\mathbf{V'} = \mathbf{k^3} \times \mathbf{V} = \mathbf{2,5^3} \times \mathbf{50\pi} = \mathbf{781,25\pi}$$

Le volume du grand cône est $\boxed{781{,}25\pi} \approx 2454$ cm^3 = $\boxed{2{,}454 \text{ L}}$.

VII – Sections

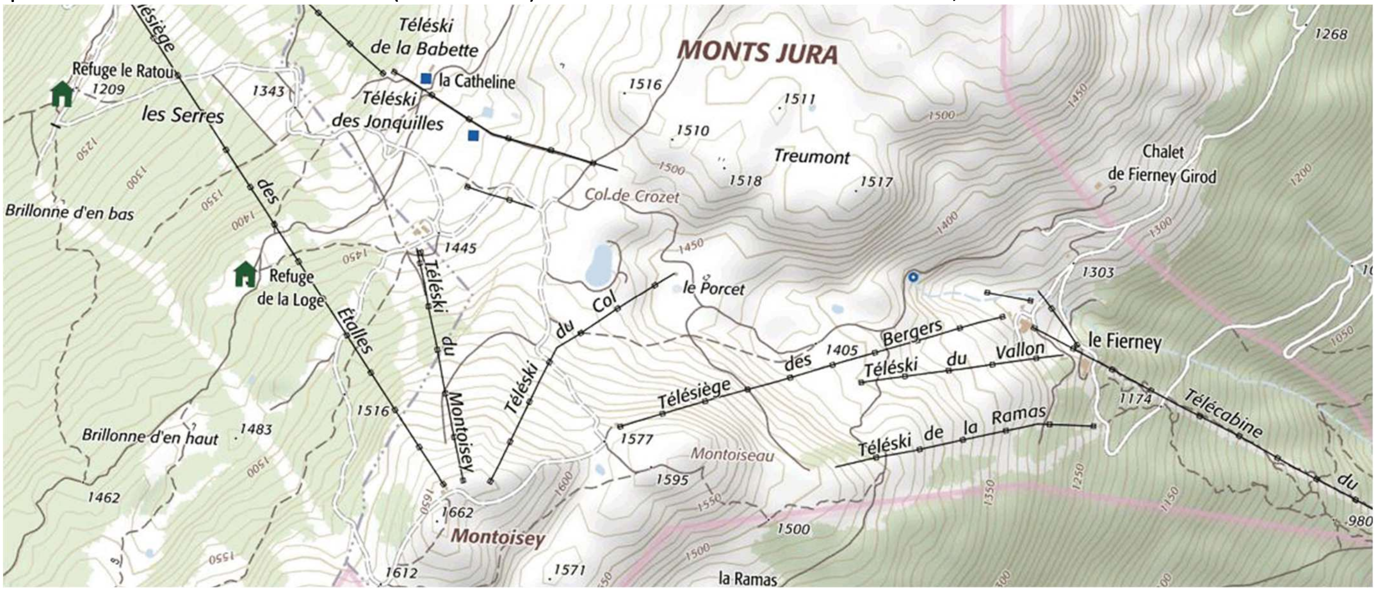
Le pavé droit	Le cône	Le cylindre
		

La sphère	La pyramide
	

Courbes de niveau

Pour une carte géographique, on sectionne la terre par des sphères de rayons différents correspondants à des altitudes différentes.

Par exemple, on sectionne par une sphère de rayon 1 500 m de plus que le rayon terrestre. On visualise ainsi tous les points étant à la même altitude (ici 1 500 m). On obtient des courbes de niveau, distantes ici de 10 m.



https://www.geoportail.gouv.fr/

VIII – Repérage

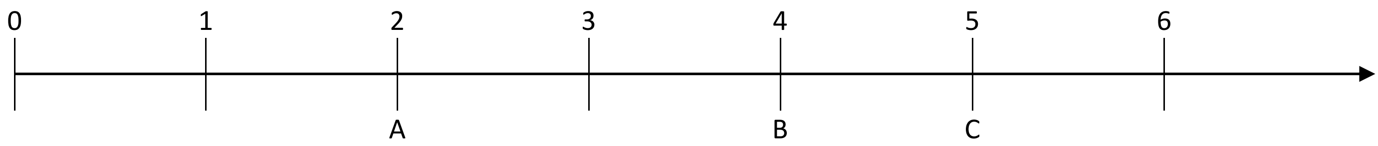
Avec 1 dimension

Pour se repérer, on a besoin de 2 points :

- l'origine (souvent le point O)
- l'unité (souvent le point I, ou le nombre 1).

On appelle *droite graduée*, une droite sur laquelle on a placé une origine et une unité.

Pour graduer la droite, il faut reporter l'unité.



Au lieu de parler de droite graduée, on pourra aussi parler d'axe gradué.

Lorsque l'on place un point sur une droite graduée, le nombre correspondant à ce point est appelé l'affixe de ce nombre.

Certaines fois on emploiera le mot abscisse.

L'affixe de A est 2 ; on notera A(2).
L'abscisse de B est 4.
Le nombre 4 est l'affixe du point B.
Le point C a pour affixe 5.

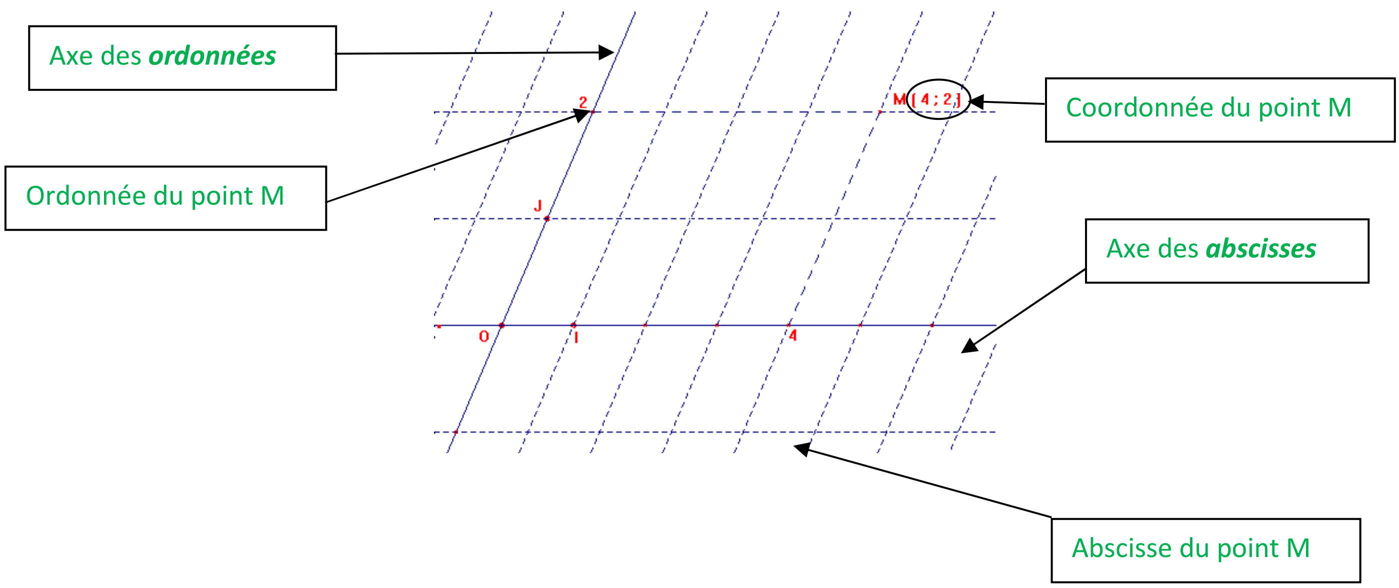
Avec 2 dimensions

Pour définir un repère, il faut donner 3 points non alignés :

- un point qui donne l'origine du repère
- un point qui donne l'unité sur l'axe des abscisses
- un point qui donne l'unité sur l'axe des ordonnées.

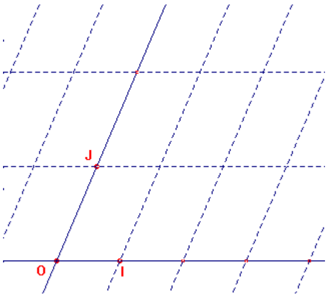
Le repère (O ; I ; J) est un repère pour lequel :

- est l'origine du repère
- I donne l'unité sur l'axe des abscisses
- J donne l'unité sur l'axe des ordonnées.



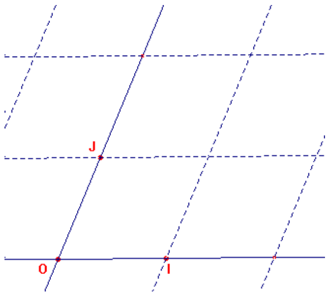
Le repère (O ; I ; J) est dit *quelconque* si

- ses axes ne sont pas perpendiculaires
- les unités ne sont pas les mêmes sur les deux axes.



Le repère (O ; I ; J) est dit *normé* ou *normal* si :

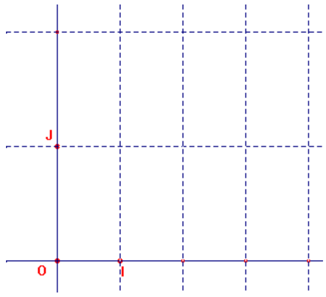
- OI = OJ



Même unité sur les deux axes.

Le repère (O ; I ; J) est dit *orthogonal* si :

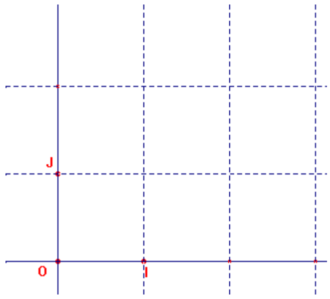
- (OI) ⊥ (OJ)



Axes perpendiculaires.

Le repère (O ; I ; J) est dit *orthonormé* ou *orthonormal* si :

- OI = OJ
- (OI) ⊥ (OJ)



Axes perpendiculaires
Même unité sur les deux axes.

Avec 3 dimensions

Pour définir un repère, il faut donner 4 points non alignés :

- un point qui donne l'origine du repère
- un point qui donne l'unité sur l'axe des abscisses
- un point qui donne l'unité sur l'axe des ordonnées.
- un point sur l'axe des hauteurs.

Le repère (O ; I ; J ; K) est un repère pour lequel :

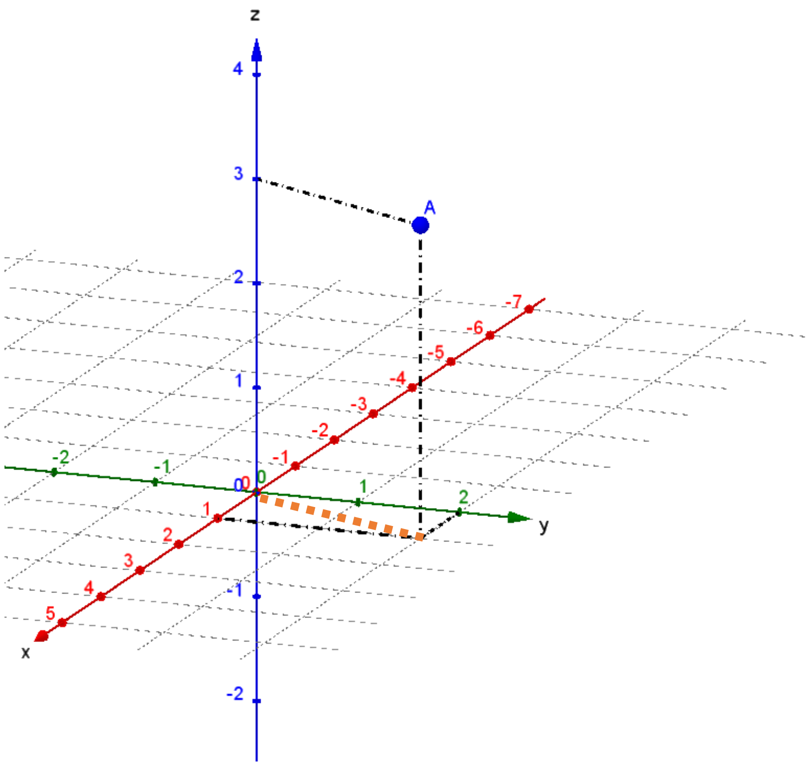
- est l'origine du repère
- I donne l'unité sur l'axe des abscisses
- J donne l'unité sur l'axe des ordonnées
- K donne l'unité sur l'axe des hauteurs.

Pour se repérer dans l'espace, on « projette » le point sur le plan « horizontal ».

On commence par donner les coordonnées de ce point sur le plan en traçant les parallèles aux axes du plan de base ; ici on obtient 1 et 2 ; les cordonnées de ce point sont (1 ; 2).

On relie de point à l'origine du repère puis on trace la parallèle qui passe par A ; cette parallèle coupe l'axe des hauteurs qui indique alors la hauteur du point ; ici c'est 3.

Le point A a pour coordonnées : A(1 ; 2 ; 3).

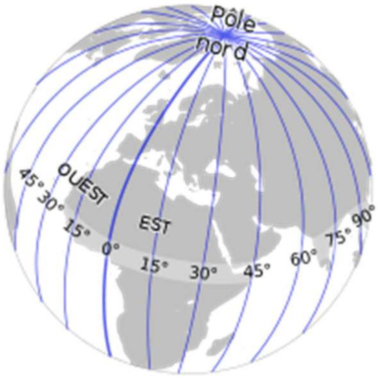


Avec 3 dimensions, sur une sphère par exemple la Terre

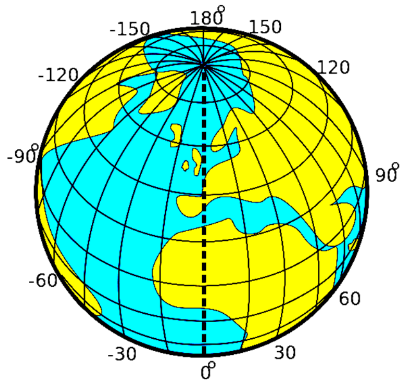
Sur une sphère, il suffit de donner deux nombres pour situer un point car on ne donne pas le troisième (qui correspondrait à l'altitude).

On va donc réaliser un « quadrillage » sur la sphère.

On va commencer par tracer des demi-cercles reliant les deux pôles ; on obtiendra les *méridiens*.
On va d'abord choisir un méridien particulier : celui qui passe par l'observatoire royal de Greenwich à proximité de Londres. Ce méridien coupe l'équateur en point qui sera l'origine de la graduation.
On gradue l'équateur de 0 à 180° vers l'Est et de 0 à 180° vers l'Ouest.



On va ensuite tracer les sections de la sphère par des plans parallèles à l'équateur ; on obtiendra des *parallèles*.
On gradue le méridien de Greenwich de 0 à 90° vers le Nord et de 0 à 90° vers le Sud.



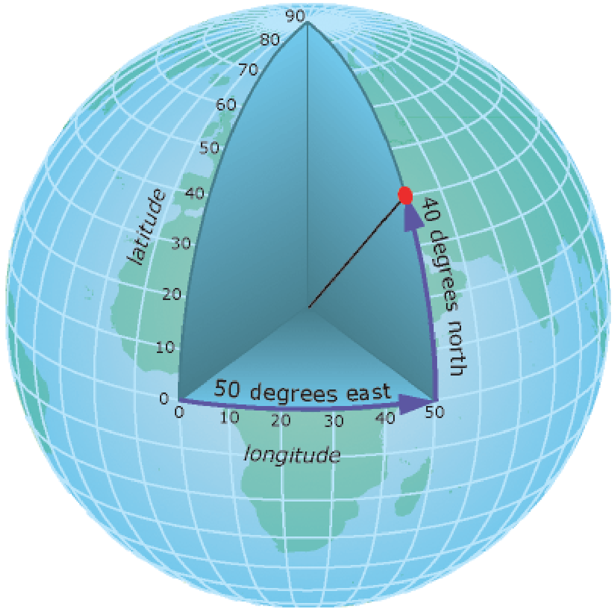
Les parallèles sont tous parallèles.
Les méridiens se coupent tous aux pôles Nord et Sud.
Les parallèles et les méridiens sont perpendiculaires.

Cela donne donc un quadrillage pour lequel les mailles ressemblent plus à des trapèzes qu'à des carrés.

Pour repérer un point sur la Terre, on donne d'abord le parallèle sur lequel on se trouve.
Par exemple : 40° Nord. On appelle cela la latitude.

On donne ensuite le méridien. Par exemple : 50° Est. On appelle cela la longitude.

On dira que les coordonnées sont 40°N et 50°E.



Les logiciels de cartographie disponibles directement sur internet (google map, google earth, geoportail …) permettent d'obtenir facilement les coordonnées d'un lieu sur la Terre.

Par exemple, les coordonnées de la salle de classe sont : 46°14'51.0"N 6°01'51.2"E.