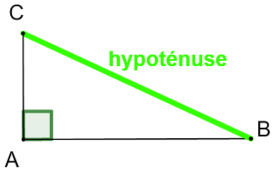
Triangles rectangles : PYTHAGORE

I – PYTHAGORE



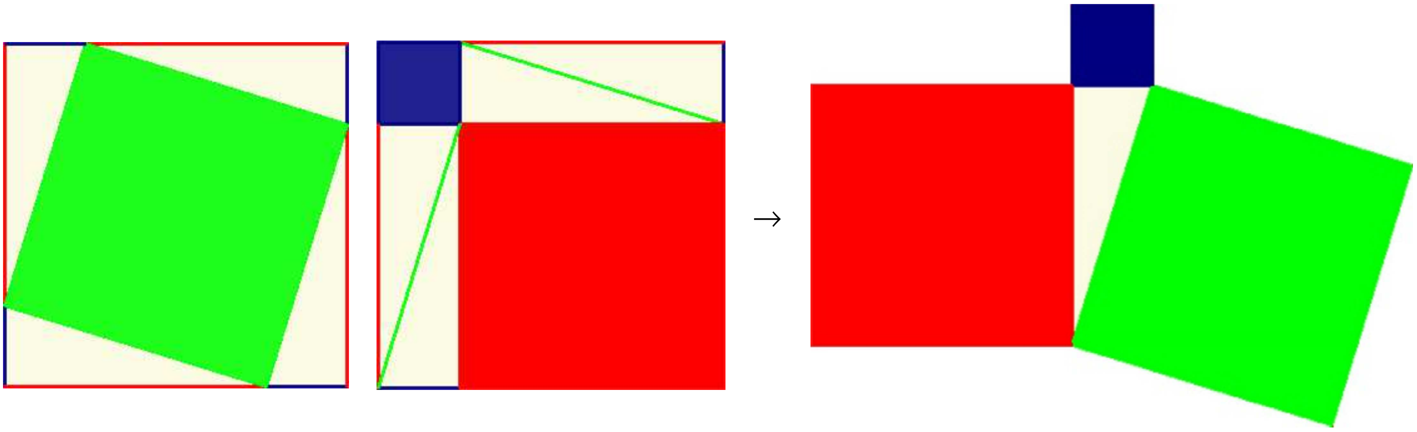
Définition

Dans un triangle, le côté opposé à l'angle droit est appelé l'*hypoténuse*.

Hypoténuse vient du latin *hypotenusa* qui vient lui-même du grec *hupoteinousa* qui signifie « cele qui sous-tend ». Ce terme désigne le côté du triangle rectangle qui semble être « tendu » par le secteur angulaire de l'angle droit.
Les côtés adjacents à l'angle droits étaient appelés cathètes.

Remarque

C'est le plus grand côté du triangle rectangle.

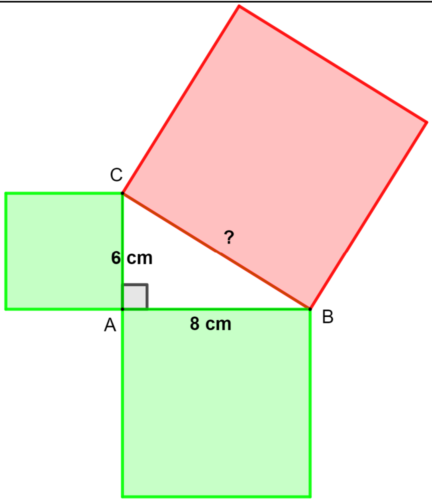
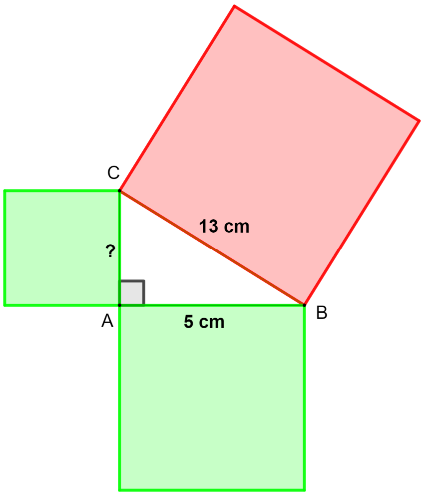


Théorème de Pythagore admis

- Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.
- Si ABC un triangle rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

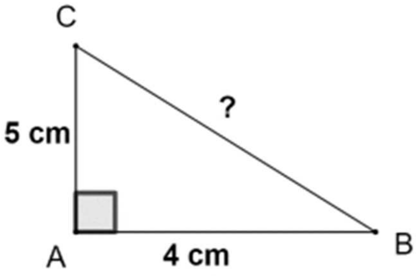
⚠ ***Cette propriété ne s'applique que dans les triangles rectangles.***

Exemples

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que - AB = 8 cm - AC = 6 cm Calcule BC.	Soit ABC un triangle rectangle en A tel que - AB = 5 cm - BC = 13 cm Calcule AC.
	
Dans ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore $BC^2 = AC^2 + AB^2$ $BC^2 = 6^2 + 8^2$ $BC^2 = 36 + 64$ $BC^2 = 100$ BC = $\sqrt{100}$ = **10 cm**	Dans ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore $BC^2 = AB^2 + AC^2$ $13^2 = 5^2 + AC^2$ $169 = 25 + AC^2$ $-25 \quad -25$ $144 = AC^2$ AC = $\sqrt{144}$ = **12 cm**

Exemple avec valeur approchée

Soit ABC un triangle rectangle tel que AB = 4 cm et AC = 5 cm.
Calcule BC.



Dans ABC rectangle en A,
d'après le théorème de Pythagore
$BC^2 = AB^2 + AC^2$
$BC^2 = 4^2 + 5^2$
$BC^2 = 16 + 25$
$BC^2 = 41$
$BC = \sqrt{41} \approx 6{,}4$ cm

Utilisation de la calculatrice

CASIO FX92	TI collège
Pour calculer $6^2 + 8^2$, je tape	
6 $\boxed{x^2}$ + 8 $\boxed{x^2}$ $\boxed{\text{EXE}}$	6 $\boxed{x^2}$ + 8 $\boxed{x^2}$ =

CASIO FX92	TI collège
Pour calculer $\sqrt{100}$, je tape	
$\boxed{\text{SECONDE}}$ $\boxed{x^2}$ 100 $\boxed{\text{EXE}}$	$\boxed{\text{SECONDE}}$ $\boxed{x^2}$ 100 =

Propriété réciproque de Pythagore admise

- Dans un triangle, si le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle est rectangle.
- Soit ABC un triangle.
  Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors le triangle est rectangle et [BC] est l'hypoténuse, le triangle est rectangle en A.

Propriété contraposée de Pythagore admise

- Dans un triangle, si le carré du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle n'est pas rectangle.
- Soit ABC un triangle.
  Si [BC] est le plus grand côté et $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ alors le triangle n'est pas rectangle.

Exemples

Prouver qu'un triangle est rectangle.	Prouver qu'un triangle n'est pas rectangle.
Soit ABC un triangle tel que AB = 3 cm, BC = 4 cm et AC = 5 cm. *Quelle est la nature de ABC ?*	*Soit ABC un triangle tel que AB = 5 cm, BC = 7 cm et AC = 6 cm.* *Quelle est la nature de ABC ?*
Si ABC était rectangle, l'hypoténuse serait [AC] car c'est le plus grand côté. $AC^2 = 5^2 = 25$ | $AB^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ Donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc d'après la propriété réciproque de Pythagore, **ABC est rectangle en B** *(car [AC] est l'hypoténuse).*	Si ABC était rectangle, l'hypoténuse serait [BC] car c'est le plus grand côté. $BC^2 = 7^2 = 49$ | $AB^2 + AC^2 = 5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61$ Donc $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ d'après la contraposée de Pythagore alors **ABC n'est pas rectangle**.

II – RACINES CARREES et RACINES CUBIQUES

hors programme en France mais nécessaire pour le collège en Suisse

Remarque ♥

$2^2 = 4$ $3^2 = 9$ $4^2 = 16$ $5^2 = 25$ $6^2 = 36$ $7^2 = 49$
$8^2 = 64$ $9^2 = 81$ $10^2 = 100$ $11^2 = 121$ $12^2 = 144$ $13^2 = 169$

$1^3 = 1$ $2^3 = 8$ $3^3 = 27$ $4^3 = 64$ $5^3 = 125$
$6^3 = 216$ $7^3 = 343$ $8^3 = 512$ $9^3 = 729$ $10^3 = 1000$

Définitions

La *racine carrée* de a est le nombre **positif** noté $\sqrt{a}$ tel que $\sqrt{a}^2 = a$

La *racine cubique* de a est le nombre noté $\sqrt[3]{a}$ tel que $\sqrt[3]{a}^3 = a$

Remarques sur la racine carrée

$$\begin{tikzcd} 5 \arrow[r, bend left, "\blacksquare^2"] & 25 \arrow[l, bend left, "\sqrt{\blacksquare}"] \end{tikzcd}$$

$\sqrt{4} = 2$ $\sqrt{9} = 3$ $\sqrt{16} = 4$ $\sqrt{25} = 5$ $\sqrt{36} = 6$ $\sqrt{49} = 7$

$\sqrt{64} = 8$ $\sqrt{81} = 9$ $\sqrt{100} = 10$ $\sqrt{121} = 11$ $\sqrt{144} = 12$ $\sqrt{169} = 13$

⚠ La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas.

$\sqrt{-1}$ n'existe pas

$\sqrt{-4}$ n'existe pas

Au lycée, une solution sera proposée pour ces racines carrées : les nombres complexes.

Remarques sur la racine cubique

$$\begin{tikzcd} 5 \arrow[r, bend left, "\blacksquare^3"] & 125 \arrow[l, bend left, "\sqrt[3]{\blacksquare}"] \end{tikzcd}$$

$\sqrt[3]{1} = 1$ $\sqrt[3]{8} = 2$ $\sqrt[3]{27} = 3$ $\sqrt[3]{64} = 4$ $\sqrt[3]{125} = 5$

$\sqrt[3]{216} = 6$ $\sqrt[3]{343} = 7$ $\sqrt[3]{512} = 8$ $\sqrt[3]{729} = 9$ $\sqrt[3]{1000} = 10$

$\sqrt[3]{-1} = -1$ $\sqrt[3]{-8} = -2$ $\sqrt[3]{-27} = -3$ $\sqrt[3]{-64} = -4$ $\sqrt[3]{-125} = -5$

$\sqrt[3]{-216} = -6$ $^{3-}\sqrt{343} = -7$ $\sqrt[3]{-512} = -8$ $\sqrt[3]{-729} = -9$ $\sqrt[3]{-1000} = -10$

Propriétés admises

Soient *a* et *b* deux nombres positif avec *b* non nul.

$$\sqrt{a}^2 = a$$

$$\sqrt{a^2} = a$$

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Pour tous les nombres *a* et *b* avec *b* non nul.

$$\sqrt[3]{a}^3 = a$$

$$\sqrt{a^3} = a$$

$$\sqrt[3]{a \times b} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

Exemples de calculs

$$\sqrt{5}^2 = 5$$

$$\sqrt{3^2} = 3$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\sqrt{1,2}^2 = 1,2$$

$$\sqrt{5,2^2} = 5,2$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$$

$$\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{50}} = \sqrt{\frac{200}{50}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt[3]{7}^3 = 7$$

$$\sqrt{11^3} = 11$$

$$\sqrt[3]{50} \times \sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{50 \times 20} = \sqrt[3]{1000} = 10$$

$$\sqrt[3]{\frac{125}{27}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{5}{3}$$

$$\sqrt[3]{-8}^3 = -8$$

$$\sqrt{(-4)^3} = -4$$

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \times 2} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$$

$$\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3$$

Définition

Simplifier une racine s'est transformer une racine en produit d'un entier par une racine d'un nombre dont la distance à zéro est plus petite.

Astuce
Pour simplifier la racine d'un entier, il faut écrire l'entier sous la forme du produit d'un carré (ou cube) par un entier

Exemples de simplification de racines carrées

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2} \qquad \sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = \sqrt{4} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

$$\sqrt{147} = \sqrt{49 \times 3} = \sqrt{49} \times \sqrt{3} = 7\sqrt{3} \qquad \sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{72} = \sqrt{4 \times 18} = \sqrt{4} \times \sqrt{18} = 2\sqrt{18} = 2\sqrt{9 \times 2} = 2 \times \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 2 \times 3 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}7\sqrt{50} - 4\sqrt{18} &= 7 \times \sqrt{25 \times 2} - 4 \times \sqrt{9 \times 2} = 7 \times \sqrt{25} \times \sqrt{2} - 4 \times \sqrt{9} \times \sqrt{2} \\ &= 7 \times 5 \times \sqrt{2} - 4 \times 3 \times \sqrt{2} = 35\sqrt{2} - 12\sqrt{2} = 23\sqrt{2}\end{aligned}$$

Exemples de simplification de racines cubiques

$$\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8 \times 4} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4} \qquad \sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{125 \times 2} = \sqrt[3]{125} \times \sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2}$$

$$\begin{aligned}11\sqrt[3]{24} + 7\sqrt[3]{-375} &= 11\sqrt[3]{8 \times 3} + 7\sqrt[3]{-125 \times 3} = 11 \times \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{3} + 7 \times \sqrt[3]{-125} \times \sqrt[3]{3} \\ &= 11 \times 2 \times \sqrt[3]{3} + 7 \times (-5) \times \sqrt[3]{3} = 22\sqrt[3]{3} - 35\sqrt[3]{3} = -13\sqrt[3]{3}\end{aligned}$$

Remarques

Les racines doivent être simplifiées.
Les calculatrices simplifient automatiquement les racines carrées.

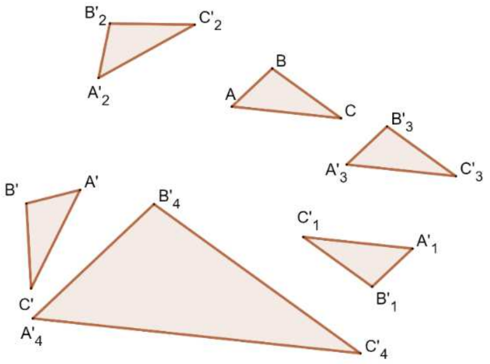
Exemple avec décomposition en produit de facteurs premiers

31104 = $2^7 \times 3^5$

$$\begin{aligned}\sqrt{31104} = \sqrt{2^7 \times 3^5} &= \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3} \\ &= \sqrt{2^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3} \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times \sqrt{2} \times 3 \times 3 \times \sqrt{3} \\ &= 72\sqrt{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{31104} &= \sqrt[3]{2^7 \times 3^5} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^3 \times 2 \times 3^3 \times 3^2} = \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{3^2} = 2 \times 2 \times \sqrt[3]{2} \times 3 \times \sqrt[3]{3^2} \\ &= 12\sqrt[3]{18}\end{aligned}$$

III – TRIANGLES SEMBLABLES



Définition

Deux triangles sont *semblables* s'ils ont la même forme, mais pas nécessairement la même taille.

Propriété admise

Deux triangles sont semblables :

- si leurs côtés sont proportionnels

ou

- s'ils ont les mêmes angles.

Remarque

Pour passer entre deux triangles semblables, on peut effectuer une ou plusieurs transformations du plan vues au collège : symétrie axiale, symétrie centrale, translation, rotation ou homothétie.

Exemple 1 : avec des angles

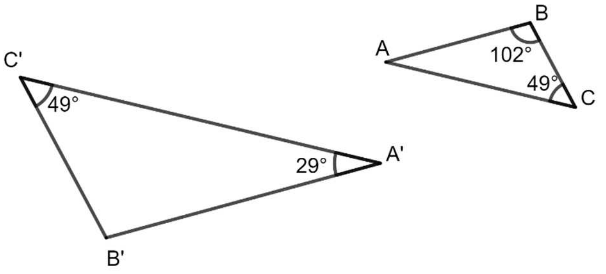
Dans le triangle ABC, on a

$\widehat{A} = 180 - \left(\widehat{B} + \widehat{C}\right) = 180 - (102 + 49) = 29°$.

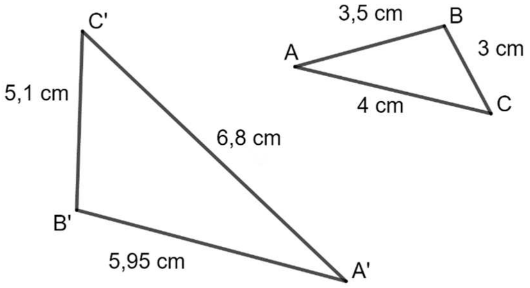
Dans le triangle A'B'C', on a

$\widehat{B'} = 180 - \left(\widehat{A'} + \widehat{C'}\right) = 180 - (49 + 29) = 102°$.

On a donc $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$ et $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ donc les triangles ABC et A'B'C' sont semblables.



Exemple 2 : avec des côtés proportionnels



$$\frac{\mathbf{A'B'}}{\mathbf{AB}} = \frac{\mathbf{5,95}}{\mathbf{3,5}} = \mathbf{1,7}$$

$$\frac{\mathbf{A'C'}}{\mathbf{AC}} = \frac{\mathbf{6,8}}{\mathbf{4}} = \mathbf{1,7}$$

$$\frac{\mathbf{C'B'}}{\mathbf{CB}} = \frac{\mathbf{5,1}}{\mathbf{3}} = \mathbf{1,7}$$

Donc $\frac{\mathbf{A'B'}}{\mathbf{AB}} = \frac{\mathbf{A'C'}}{\mathbf{AC}} = \frac{\mathbf{C'B'}}{\mathbf{CB}}$ donc les triangles ABC et A’B’C’ sont semblables.

PARCOURS DIFFÉRENCIÉS

https://www.lesmathsdherve.net/triangles-rectangles-parcours-differencies/

MATHS

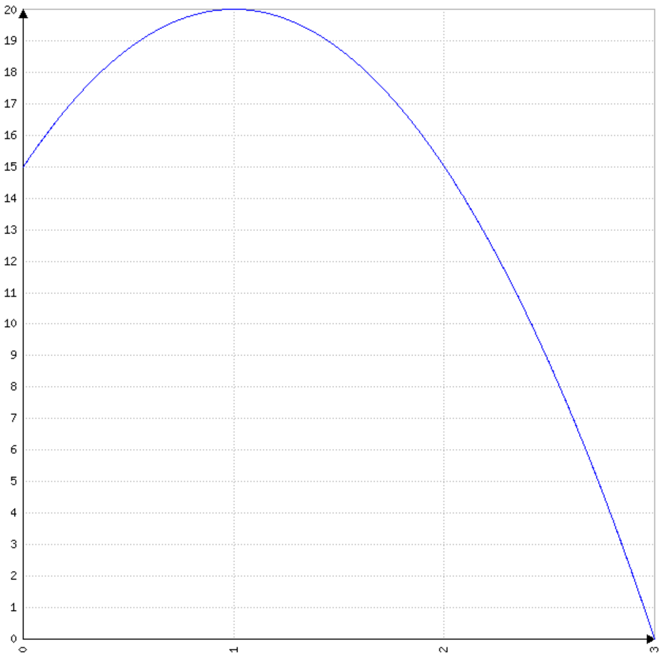
https://www.lesmathsdherve.net/triangles-rectangles-videos/

https://www.lesmathsdherve.net/triangles-rectangles-aides/

MATHS

https://www.lesmathsdherve.net/triangles-rectangles-diaporama/

Exemple de la balle



On a lancé une balle en l'air.
Sur l'axe des abscisses se trouve le temps en secondes et sur l'axe des ordonnées se trouve la hauteur de la balle en mètres.

La hauteur de la balle dépend du temps ; on dit qu'on peut donner la hauteur de la balle en fonction du temps. On appelle x le temps et f la hauteur de la balle en fonction du temps. On dit qu'on peut exprimer f en fonction de x.

Après 0 seconde (au départ), la hauteur de la balle est de 15 m.
On dit que 15 est l'image de 0 par f et on note f(0) = 15, qui se lit *f de 0 égal 15*.

Après 1 seconde, la hauteur de la balle est à son maximum ; elle est de 20 m.
On dit que 20 est l'image de 1 par f et on note f(1) = 20.

Après 2 secondes, la hauteur de la balle est de 15 m.
On dit que 15 est l'image de 2 par f et on note f(2) = 15.

Après 3 secondes, la hauteur de la balle est de 0 m.
On dit que 0 est l'image de 3 par f et on note f(3) = 0.

On a déterminé (par un calcul de physique) que la hauteur en fonction du temps était donnée par la formule : $-5x^2 + 10x + 15$.

On notera :

$$f(x) = -5x^2 + 10x + 15$$

ou

$$f : x \longrightarrow -5x^2 + 10x + 15$$

On a vu qu'on pouvait lire l'image d'un nombre sur le graphique. Il est aisé de calculer cette image en utilisant la forme algébrique de la fonction.

Par exemple, on cherche la hauteur de la balle après 1,5 s. On va calculer f(1,5) :

$$f(1,5) = -5\times1,5^2 + 10\times1,5 + 15 = 18,75.$$

On peut interpréter ce résultat en disant que la hauteur de la balle après 1,5 s est de 18,75 m.

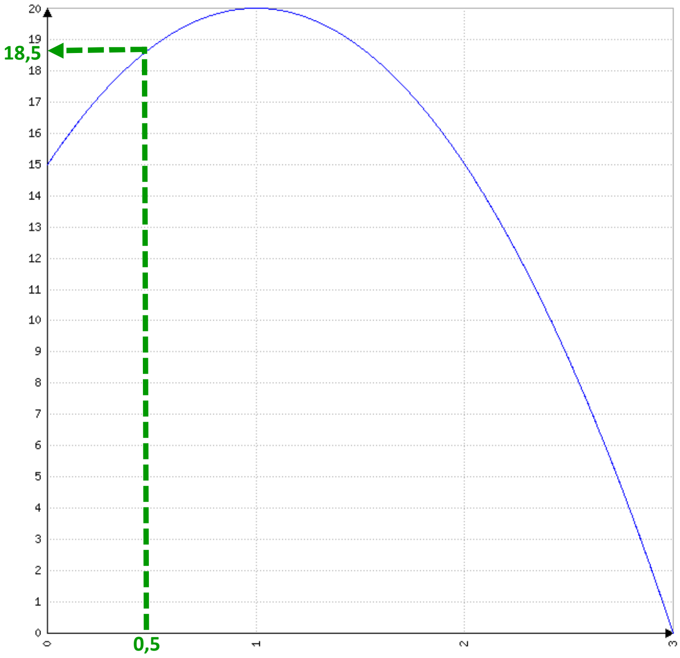
On a vu que la hauteur de la balle après 0 ou 2 secondes était la même (15 m). On dira que 0 et 2 secondes sont des antécédents de 15 m.
Le nombre 20 a un seul antécédent 1 s.
Le nombre 22 n'a pas d'antécédent car la balle n'est jamais montée jusqu'à 22 m.

Remarque

Un nombre a toujours une et une seule image par une fonction.
Un nombre peut avoir : 0, 1 ou plusieurs antécédents par une fonction.

Comment déterminer l'image d'un nombre par une fonction ?

Par exemple, on cherche l'image de 0,5 par la fonction f définie par $f(x) = -5x^2 + 10x + 15$.



1er cas : méthode graphique

On se positionne à 0,5 sur l'axe des abscisses.

On « monte » (ou « descend ») jusqu'à croiser la courbe de la fonction.

On « part horizontalement » jusqu'à l'axe des ordonnées et on lit la valeur.

On trouve ici que $f(0,5) \approx 18,5$.

Par lecture graphique, on trouve une valeur dont on ne sait pas si elle est exacte.

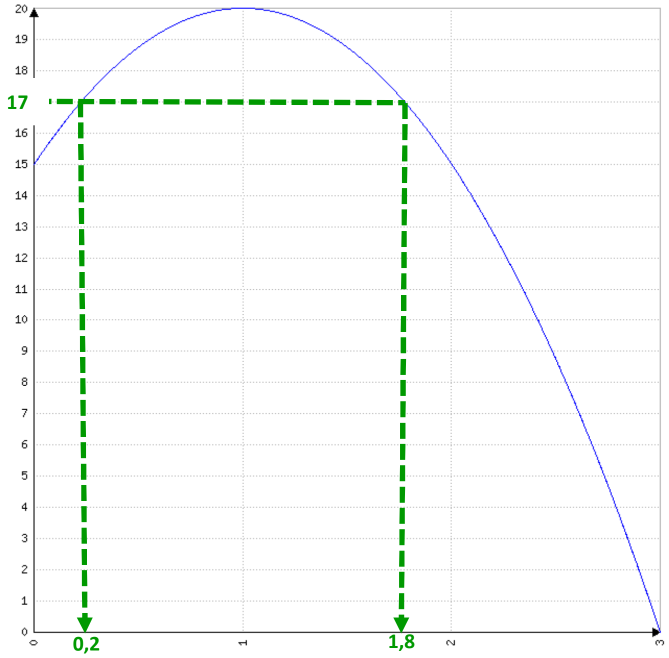
2ème cas : par le calcul

Il suffit de remplacer x par 0,5 dans la formule $f(x) = -5x^2 + 10x + 15$.

$f(0,5) = -5\times0,5^2 + 10\times0,5 + 15 = 18,75$.

On trouve une valeur exacte.

Comment déterminer les antécédents d'un nombre par une fonction ?



1er cas : méthode graphique

Par exemple, on cherche les antécédents de 17 par la fonction f définie par $f(x) = -5x^2 + 10x + 15$.

On se positionne à 17 sur l'axe des ordonnées.

On « part horizontalement » jusqu'à croiser la courbe de la fonction.

On « monte » (ou descend) jusqu'à l'axe des abscisses et on lit les valeurs.

On trouve ici que les antécédents de 17 sont environ 0,2 et 1,8.
Par lecture graphique, on trouve des valeurs dont on ne sait pas si elles sont exactes.
Bien penser à chercher tous les antécédents.

2ème cas : par le calcul

Par exemple, on cherche les antécédents de 15 par la fonction f définie par $f(x) = -5x^2 + 10x + 15$.

Il faut résoudre une équation. ***ATTENTION, ce n'est pas toujours possible***.
Au lycée, on verra comment trouver une valeur approchée avec la calculatrice graphique.

On cherche les nombres x tels que $f(x) = 15$
donc $-5x^2 + 10x + 15 = 15$
donc $-5x^2 + 10x = 0$
donc $x(-5x + 10) = 0$
Or « si un produit est nul, alors l'un, au moins, des facteurs est nul »
donc $x = 0$ ou $-5x + 10 = 0$
$-5x = -10$
$x = 2$

Les antécédents de 15 sont 0 et 2.

Comment construire la représentation graphique d'une fonction ?

1. On construit un « tableau de valeurs ».
2. On construit un repère et on place les points dans le repère.
3. On relie les points.

Attention, les points ne sont pas obligatoirement alignés ; il faut donc les relier en formant une courbe et non pas nécessairement une droite.

Exemple

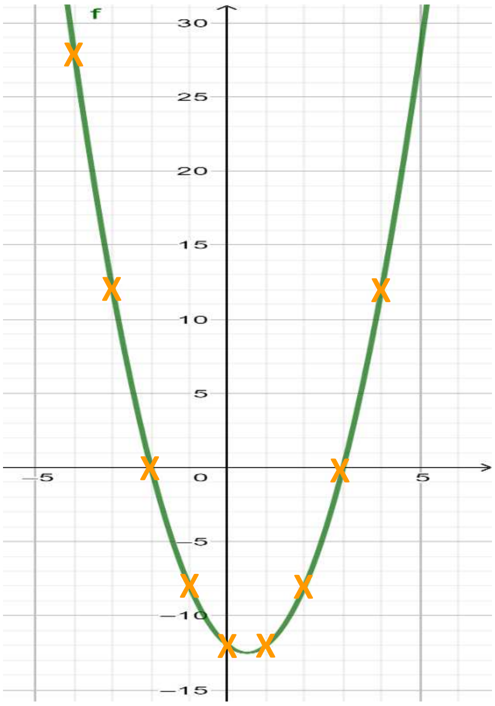
On veut construire la représentation graphique de la fonction f définie par la formule $f(x) = 2x^2 - 2x - 12$ pour x appartenant à l'intervalle [-4 ; 4]

On prend n'importe quels nombres.
En général, on prend les bornes de l'intervalle (ici, -4 et 4) et on place des valeurs régulièrement. Ici, le pas (l'écart entre deux nombres) est 1.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	28	12	0	-8	-12	-12	-8	0	12

On calcule les images de la première ligne avec la formule

$f(x) = 2x^2 - 2x - 12$



Ce tableau de valeur peut être calculé avec la machine.

Sur la CASIO, taper

MODE 4 :table	*Place la calculatrice en mode tableau de valeur*
f(X)= $2X^2 - 2X – 12$ EXE	*On rentre la fonction en utilisant la touche X de la calculatrice.*
Début ? -4 EXE	*On rentre le point de départ du tableau de valeur.*
Fin ? 4 EXE	*On rentre le point d'arrivée du tableau de valeur.*
Pas ? 1 EXE	*On rentre le pas du tableau de valeur (l'écart entre deux nombres).*
	On obtient le tableau de valeur
MODE 1 :comp	*Pour revenir au mode « normal »*

PARCOURS DIFFÉRENCIÉS

https://www.lesmathsdherve.net/fonctions-parcours-differencies/

https://www.lesmathsdherve.net/fonctions-videos-2/

https://www.lesmathsdherve.net/fonctions-aides/

PROPORTIONNALITE et HOMOTHETIES

I – Proportionnalité

Définition

Deux séries de valeurs sont dites *proportionnelles* si pour passer de l'une à l'autre on multiplie toujours par un même nombre appelé le *coefficient de proportionnalité*.

Exemple

Volume de sans plomb 95 (E10) en litres	15	23	12
Prix en €	22,80	34,96	18,24

↓ × 1,52

Propriété admise

$$a \times \frac{b}{a} = b$$

Pour passer du nombre a au nombre b, on multiplie par $\frac{b}{a}$.

$$a \xrightarrow{\times \frac{b}{a}} b \qquad départ \xrightarrow{\times \frac{arrivée}{départ}} arrivée$$

Exemples

$$5 \xrightarrow{\times 3} 15 \qquad 5 \xrightarrow{\times 13} 65 \qquad 5 \xrightarrow{\substack{\times \frac{645}{5} \\ \text{ou} \\ \times 129}} 645 \qquad 5 \xrightarrow{\times \frac{7}{5}} 7 \qquad 7 \xrightarrow{\times \frac{3}{7}} 3$$

Comment déterminer si un tableau correspond à une situation de proportionnalité ?

1°) On calcule, séparément, les quotients qui permettent de passer d'une valeur à la valeur correspondante.

2°) Si les quotients sont tous égaux, c'est une situation de proportionnalité.
Sinon, cela ne l'est pas.

Exemple 1

Masse de fraises en kg	3	5	7
Prix en €	5,10	8,50	11,90

Pour passer de 3 à 5,1 on multiplie par $\frac{5,1}{3} = 1,7$

Pour passer de 5 à 8,5 on multiplie par $\frac{8,5}{5} = 1,7$

Pour passer de 7 à 11,9 on multiplie par $\frac{11,9}{7} = 1,7$

C'est bien une situation de proportionnalité de coefficient 1,7.

Exemple 2

Masse de poires en kg	3	5	7
Prix en €	4,80	8,00	11,00

$$\frac{4,80}{3} = 1,6 \qquad \frac{8,00}{5} = 1,6 \qquad \frac{11,00}{7} \approx 1,57$$

Ce n'est pas une situation de proportionnalité.

Exemple 3

9	15	18
12	20	24

$$\frac{12}{9} = \frac{4}{3} \qquad \frac{20}{15} = \frac{4}{3} \qquad \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$$

C'est une situation de proportionnalité.

Propriété des produits en croix - admise

Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ alors $a \times d = b \times c$ Si $a \times d = b \times c$ alors $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

Exemple 1

On veut comparer les fractions $\frac{65}{91}$ et $\frac{115}{161}$

On calcule séparément les produits en croix :

$65\times161 = 10\,465$

et $91\times115 = 10\,465$

donc $65\times161 = 91\times115$ donc $\frac{65}{91}=\frac{115}{161}$

Exemple 2

On veut comparer les fractions $\frac{7}{13}$ et $\frac{9}{17}$

On calcule séparément les produits en croix :

$7\times17 = 119$

et $13\times9 = 117$

donc $7\times17 \neq 13\times9$ donc $\frac{7}{13}\neq\frac{9}{17}$

Exemple 3

Trouve le nombre manquant $\frac{5}{4}=\frac{7}{?}$

Les fractions sont égales donc les produits en croix sont égaux

$5 \times ? = 4 \times 7$ *On effectue les produits en croix*

$5 \times ? = 28$ *On simplifie chaque membre*

$? = 5,6$ *On divise par 5*

Astuce

S'il n'y a qu'une valeur inconnue, on multiplie les deux quantités qui « touchent » celle qu'on cherche puis on divise le résultat par la quantité qui est « en face ».

Exemple 4

$$\frac{5}{4}=\frac{7}{a} \qquad \frac{5}{4}=\frac{b}{3} \qquad \frac{c}{4}=\frac{7}{2} \qquad \frac{5}{d}=\frac{7}{3}$$

$$a=\frac{4\times7}{5}=5,6 \qquad b=\frac{3\times5}{4}=3,75 \qquad c=\frac{4\times7}{2}=14 \qquad d=\frac{5\times3}{7}=\frac{15}{7}$$

Exemple 5

Trouve le nombre manquant $\frac{6}{4}=\frac{5+a}{a}$

Les fractions sont égales donc les produits en croix sont égaux

$6 \times a = 4 \times (5 + a)$ *On effectue les produits en croix*

$6a = 20 + 4a$ *On simplifie chaque membre*

$-4a$ $-4a$

$2a = 20$ *On isole les inconnues dans un membre*

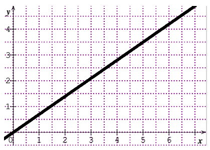
$a = 10$ *On divise les deux membres par 2*

Propriété – admise

La représentation graphique d'une situation de proportionnalité est

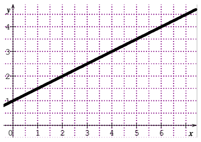
- une droite
- qui passe par l'origine du repère

Exemples

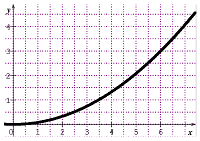


Une droite qui passe par l'origine

Situation de proportionnalité



Une droite qui ne passe pas par l'origine



Pas une droite

Pas une situation de proportionnalité

II – Vitesse, distance et temps

3,4h ≠ 3h 40 min

3,4 h = 3h + 0,40h = 3h 24min

× 60

3h 18min ≠ 3,18h

3h 18 min = 3h + 0,30h = 3,3h

÷ 60

Conversions avec la calculatrice

CASIO FX92	Texas Instruments
3,15 EXE °'''	3,15 $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{\to\text{DMS}}$ $\boxed{\text{entrer}}$

3,15 h = 3h 9min

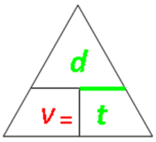
CASIO FX92	Texas Instruments
3 °''' 12 °''' EXE °'''	3 $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{°}$ 12 $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\pi}$ $\boxed{'}$ $\boxed{\text{entrer}}$

3h 12min = 3,2h

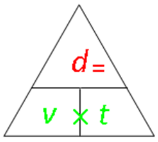
Propriétés admises

Si *d* est la distance, *t* le temps et *v* la vitesse moyenne on a alors

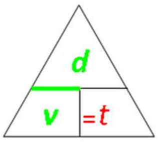
$v = \frac{d}{t}$



$d = v \times t$



$t = \frac{d}{v}$



Exemple 1 : recherche de la vitesse moyenne

Clément roule pendant 3h et parcourt 183km. Quelle est sa vitesse moyenne ?

Calculons sa vitesse moyenne

Méthode 1

$$v = \frac{d}{t} = \frac{183}{3} = 61$$

Méthode 2

Distance	Temps
183 km	3h
?	1h

↓ ÷3

$$? = \frac{183 \times 1}{3} = 61$$

Sa vitesse moyenne est de $\boxed{61 \text{ km/h}}$.

Exemple 2 : recherche de la distance parcourue

Mathieu roule pendant 3h à 43 km/h de moyenne. Quelle est la distance parcourue ?

Calculons la distance parcourue

Méthode 1

$$d = v \times t = 43 \times 3 = 129$$

Méthode 2

Distance	Temps
43 km	1h
?	3h

↓ ×3

$$? = \frac{43 \times 3}{1} = 129$$

La distance parcourue est $\boxed{129 \text{ km}}$.

Exemple 3 : recherche du temps de parcours

Pauline marche pendant 12km à la vitesse moyenne de 4,5 km/h. Quel est le temps de parcours ?

Calculons le temps de parcours

Méthode 1

$$t = \frac{d}{v} = \frac{12}{4,5} = \frac{8}{3}$$

Méthode 2

Distance	Temps
4,5 km	1h
12 km	?

$\rightarrow \div 4,5$

$$? = 12 \div 4,5 = \frac{8}{3}$$

Le temps de parcours est de $\frac{8}{3}$h = $\boxed{\text{2h 40min}}$.

Exemple 4 : conversions de vitesse

Convertir 135 km/h en m/s

Distance	Temps
135 km	1 h
=	=
135 000 m	3 600 s
?	1 s

↓ ÷ 3 600

? = 135 000 ÷ 3 600 = 37,5

135 km/h = 37,5 m/s

Convertir 15 m/s en km/h

Distance	Temps
15 m	1 s
? m	3 600 s
=	=
? km	1h

↓ × 3600

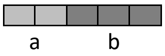
? = 15 × 3600 = 54 000 m = 54 km

15 m/s = 54 km/h

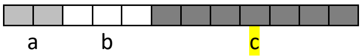
III – Ratios

Définitions

Deux nombres a et b sont dans le *ratio* 2 : 3 si $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$



Trois nombres a, b, c sont dans le *ratio* 2 : 3 : 7 si $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{7}$



Exemple d'application 1

Les ingrédients de la pâte brisée sont dans le ratio 1 : 1 : 2

Cela signifie qu'il faut 1 part de beurre pour 1 part de sucre et 2 parts de farine.

	Beurre	Sucre	Farine
	1 part	1 part	2 parts
Pour une pâte à tarte	125 g	125 g	250 g

Exemple d'application 2

Les couleurs secondaires (vert, orange et violet) sont dans le ratio 1:1. Par exemple, pour obtenir du vert, on prend 1 part de jaune et 1 part de bleu.

Pour obtenir le jaune verdâtre, on prend 1 part de vert et une part de jaune. On dit qu'il est dans le ratio 1:1 avec le vert et le jaune.

Pour obtenir le jaune verdâtre, on peut aussi pendre 1 part de bleu et 3 parts de jaune. On dit alors qu'il est dans la ration 1:3 avec le bleu et le jaune.

https://www.cours-de-peinture.net/technique-de-melange-en-peinture-acrylique/

Exemple d'application 3

Julien a rangé ses jouets dans des petites boites en carton.

Il a 3 boites de voitures et 4 boites de poupées.

On peut dire que ses jouets sont dans le ration 3:4 pour les voitures et les poupées.

Il y a $\frac{3}{7}$ de boites de voitures et $\frac{4}{7}$ de boites de poupées.

Voitures	Poupées	Total
3	4	7

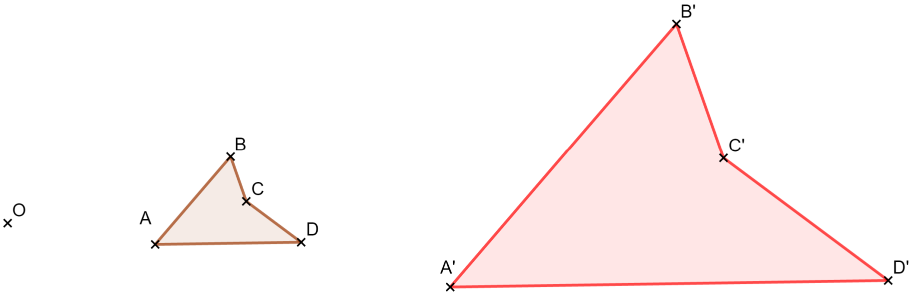
IV – Agrandissement/réduction - Homothéties

Définition

Le point A' est l'image du point A par l'*homothétie* de centre O et de coefficient k si :

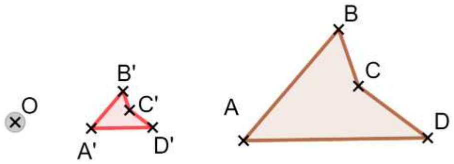
- A' ∈ (OA)
- OA' = k × OA

Si le coefficient est supérieur à 1, on parle d'*agrandissement*.



Le quadrilatère A'B'C'D' est agrandissement de ABCD de centre O et de coefficient 3.

Si le coefficient est entre 0 et 1, on parle de *réduction*.

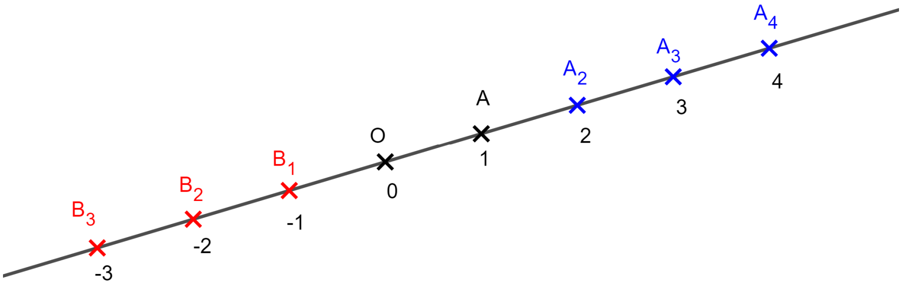


Le quadrilatère A'B'C'D' est la réduction de ABCD de centre O et de coefficient $\frac{1}{3}$.

Construction

Pour construire l'image du point A par l'homothétie de centre O et de rapport k, il faut :

- Si k>0, tracer [OA) puis mesurer [OA] et placer A' sur [OA) tel que OA' = k × OA
- Si k<0, tracer [AO) puis mesurer [OA] et placer A' sur [AO) tel que OA' = (*distance à zéro de* k) × OA



- A_2 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 2
- A_3 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 3
- A_4 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 4
- B_1 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -1
- B_2 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -2
- B_3 est l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -3

Remarque

Une homothétie de rapport -1 est une symétrie centrale

Propriété admise

L'homothétie conserve les angles, les formes mais pas les distances et les surfaces (cf. la propriété d'agrandissement réduction des solides, vue plus tard dans l'année).

Remarque

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

Pour construire la figure ci-contre, j'ai :

1. Tracer l'image A' de A
2. Tracer l'image B' de B
3. Construis le carré A'B'C'D'.
4. Tracer la diagonale [A'C']
5. Placer son milieu E'.
6. Tracer le segment [B'E'].
7. Placer le point M' au milieu de [A'B'].
8. Tracer le demi-cercle de diamètre [A'B'] à l'extérieur du carré.

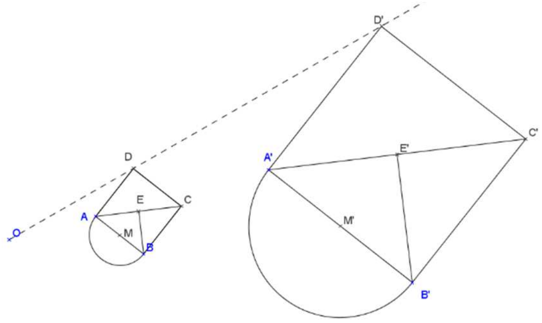


Image par l'homothétie de centre O et de rapport 3.

Caractériser

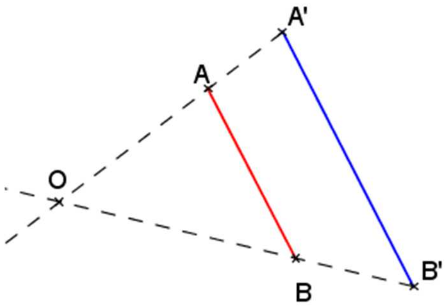
Pour caractériser une homothétie, il faut trouver son centre et son rapport.

Repérer 2 points A et B et leurs images A' et B' telles que ces points ne soient pas alignés.

Tracer les 2 demi-droites [A'A) et [B'B) ; elles se coupent en O qui est le centre.

Mesurer [OA] et [OA'].

Le rapport k vérifie : $k = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$.



PARCOURS DIFFÉRENCIÉS

https://www.lesmathsdherve.net/proportionnalite-homotheties-parcours-differencies/

https://www.lesmathsdherve.net/proportionnalite-homotheties-videos/

https://www.lesmathsdherve.net/proportionnalite-homotheties-aide/

Exemple

Les diviseurs de 45 sont : 1, 3, 5, 9, 15 et 45.

Définition

Un *diviseur commun* à deux nombres entiers est un nombre entier qui divise chacun d'eux.

Exemples

- 2 est un diviseur commun à 6 et à 10
- Les diviseurs de 12 sont : **1** ; **2** ; **3** ; 4 ; **6** et 12.
  Les diviseurs de 18 sont : **1** ; **2** ; **3** ; **6** ; 9 et 18.
  Donc les diviseurs communs à 12 et 18 sont **1** ; **2** ; **3** et **6**.

Définition

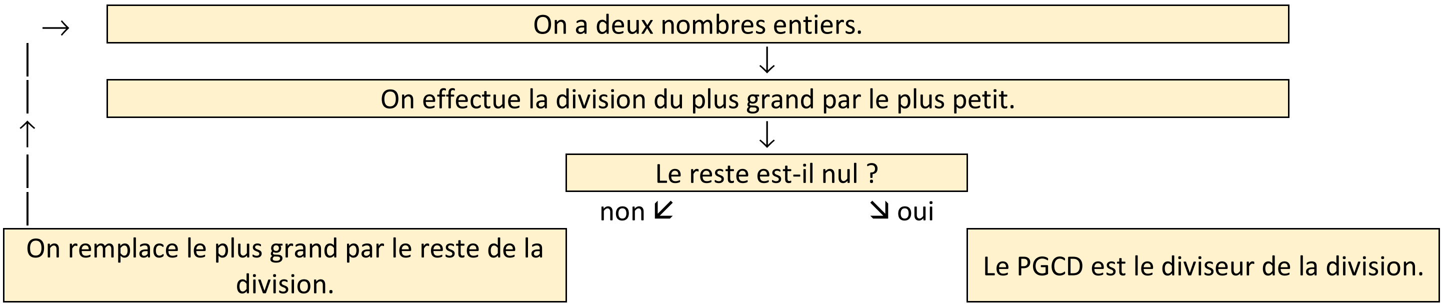
Le plus grand des nombres parmi les diviseurs communs à plusieurs nombres entiers est appelé le *plus grand diviseur commun*, noté *PGCD*.

Exemple

Le PGCD de 12 et 18 est 6.

On note : **PGCD (12 ; 18) = 6**.

Comment trouver le PGCD de deux entiers ? (Algorithme d'Euclide)



Exemple

Calculons le PGCD de 180 et 170.

Le plus grand nombre   Le plus petit nombre

Dividende	Diviseur	Reste
180	170	10
170	**10**	0

Le reste de la division

Donc **PGCD (180 ; 170) = 10**.

Comment effectuer une division euclidienne à la calculatrice ?

On veut connaitre le reste de la division euclidienne de 1254 par 46.

CASIO FX92	TI COLLEGE PLUS
1254 ⊢ 46 EXE	1254 SECONDE ÷ 46 Entrer

On obtient : Quotient = 27 et Reste = 12

Exemples de calculs de PGCD

Calculons le PGCD de 307 et 315.

Dividende	Diviseur	Reste
315	307	8
307	8	3
8	3	2
3	2	1
2	1	0

Donc le PGCD de 307 et 315 est **1**.

Calculons le PGCD de 1254 et 1300.

Dividende	Diviseur	Reste
1300	1254	46
1254	46	12
46	12	10
12	10	2
10	2	0

Donc le PGCD de 1254 et 1300 est **2**.

Calculons le PGCD de 1254 et 2.

Dividende	Diviseur	Reste
1254	2	0

Donc le PGCD de 1254 et 2 est **2**.

Définition

Deux nombres entiers sont dits *premiers entre eux* si leur PGCD vaut 1.

Définition

Une fraction est dite *irréductible* si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux (donc si leur PGCD vaut 1).

Exemples

- Comme PGCD (233 ; 377) = 1 alors 233 et 377 sont premiers alors $\frac{233}{377}$ est irréductible.
- Comme PGCD (42 ; 75) = 3 alors 42 et 75 ne sont pas premiers entre eux alors $\frac{75}{42}$ est réductible (on peut la simplifier).

Comment rendre une fraction irréductible ?

Soit la fraction $\frac{a}{b}$ que l'on veut rendre irréductible.

Si PGCD (a ; b) = 1 alors $\frac{a}{b}$ est irréductible.

Si PGCD (a ; b) ≠ 1 alors on divise le numérateur et le dénominateur de la fraction par ce PGCD et on obtient une fraction irréductible.

Exemples

- $\frac{180}{170} = \frac{18}{17}$ est irréductible car on a divisé le numérateur et le dénominateur de la fraction par leur PGCD, qui est ici 10.
- $\frac{180 \div 10}{170 \div 10} = \frac{18}{17}$
- $\frac{307}{315}$ est irréductible car PGCD (307 ; 315) = 1

Propriété - admise

Les diviseurs communs à deux entiers sont les diviseurs de leur PGCD.

Exemples

- Comme PGCD (1000 ; 750) = 250 alors les diviseurs communs à 1000 et 750 sont les diviseurs de 250, ce sont donc 1 ; 2 ; 5 ; 10 ; 25 ; 50 ; 125 ; 250.
- Comme PGCD (233 ; 373) = 1 alors 233 et 373 n'ont que 1 comme diviseur commun.

Exemple 1 de problème avec le PGCD

Dans la scierie de Paul, il y a des planches de 250 cm et 300 cm. Afin de simplifier ses ventes, Paul souhaite vendre des planches ayant toutes la même longueur, en recoupant les planches qu'il a dans son stock (sans chute). Les dimensions des nouvelles planches seront des entiers.

Quelle peut être la taille maximale de ces planches ?

Comme les planches doivent avoir toutes la même longueur, la longueur d'une planche doit être un diviseur commun à 250 cm et 300 cm.
Comme on veut des planches les plus grandes possibles, la longueur d'une planche sera le PGCD de 250 cm et 300 cm.
Calculons le PGCD de 250 et 300

Dividende	Diviseur	Reste
300	250	50
250	50	0

Donc PGCD (250 ; 300) = 50 donc la taille maximale d'une planche est de **50 cm**.

Exemple 2 de problème avec le PGCD

Nelson vient de restaurer une vieille maison et il souhaite carreler sa cuisine. Cette dernière est une pièce rectangulaire de 4,2m par 5,4m. Il souhaite poser des carreaux identiques sans faire aucune découpe.

Dans le magasin, les carreaux disponibles ont tous des dimensions entières en centimètres et sont tous de forme carrée.

Quelle peut être la taille des carreaux et combien doit-il en acheter ?

Comme les carreaux sont des carrés, ils ont la même longueur et la même largeur, donc le côté d'un carreau doit diviser la longueur et la largeur de la cuisine. Le côté d'un carreau est donc un diviseur commun à 420 cm et 540 cm.
Calculons le PGCD de 420 et 540

Dividende	Diviseur	Reste
540	420	120
420	120	60
120	60	0

Donc PGCD (420 ; 540) = 60 donc la taille maximale d'un carreau est 60 cm.
Les tailles possibles pour les carreaux sont les diviseurs de 60, soit : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 ; 60.
Voici donc les solutions possibles :

Côté d'un carreau	1 cm	2 cm	3 cm	4 cm	5 cm	6 cm	10 cm	12 cm	15 cm	20 cm	30 cm	60 cm
Nombre de carreaux	226800	56700	25200	14175	9072	6300	2268	1575	1008	567	252	63

Comment déterminer ce que l'on trouve lorsque l'on a un diviseur commun ou le PGCD ?

Lorsqu'il s'agit d'un mélange, le PGCD est le nombre de paquets.

Lorsqu'il ne s'agit pas d'un mélange, le PGCD est le nombre d'objets dans un paquet.

Exemple

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Enoncés</td><td colspan="2">Jacques dispose de 144 billes et 40 soldats de plomb. Il veut tout donner à ses copains de telle sorte que chaque copain ait :</td></tr>
<tr><td>le même nombre d'objets de chaque sorte.
Combien a-t-il de copains au maximum et que recevront-ils ?</td><td>le même nombre d'objets : soit des billes, soit des soldats.
Que recevra au maximum chaque personne et combien a-t-il de copains ?</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Réponses</td><td>Pourquoi un diviseur commun ?</td><td>Comme il veut utiliser toutes les billes et tous les soldats de plomb et comme chacun recevra la même chose, alors le nombre de copains est un diviseur commun à 144 et 40.</td><td>Comme il veut utiliser toutes les billes et tous les soldats de plomb et comme chacun recevra le même nombre d'objets, alors le nombre d'objets reçus est un diviseur commun à 144 et 40.</td></tr>
<tr><td>Pourquoi le plus grand ?</td><td>Comme il veut partager en un maximum de copains, alors le nombre de copains est le PGCD de 144 et 40.</td><td>Comme il veut que chacun ait le maximum d'objets, alors le nombre d'objets reçus est le PGCD de 144 et 40.</td></tr>
<tr><td>Calcul du PGCD</td><td colspan="2">Je calcule le PGCD de 144 et 40.
<table>
<tr><th>Dividende</th><th>Diviseur</th><th>Reste</th></tr>
<tr><td>144</td><td>40</td><td>24</td></tr>
<tr><td>40</td><td>24</td><td>16</td></tr>
<tr><td>24</td><td>16</td><td>8</td></tr>
<tr><td>16</td><td>8</td><td>0</td></tr>
</table>
Donc PGCD(144 ; 40) = 8.</td></tr>
<tr><td>Phrase réponse</td><td>Il a 8 copains et chacun aura 144÷8 = 18 billes et 40÷8 = 5 soldats.</td><td>Chacun recevra 8 objets.
Il y aura 144÷8 = 18 copains qui auront 8 billes et 40÷8 = 5 copains qui auront 8 soldats.</td></tr>
</table>

PGCD avec la calculatrice ou sur l'ordinateur

CASIO FX92	**TI COLLEGE PLUS**
ALPHA CALC 18 SHIFT 3 12) EXE	maths 1 18 2nde , 12) entrer

TABLEUR : Méthode d'Euclide			
	A	**B**	**C**
1	Dividende	Diviseur	Reste
2	18	14	= MOD(A2 ; B2)
3	= B2	= C2	= MOD(A3 ; B3)
4	= B3	= C3	= MOD(A4 ; B4)

PYTHON : Méthode d'Euclide

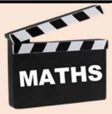
```
def pgcd(a,b):
    """pgcd(a,b): calcul du 'Plus Grand Commun Diviseur' entre les 2 nombres entiers a et b"""
    while b!=0:
        r=a%b    #on calcule le reste de la division de a par b
        a,b=b,r   #on recommence en "glissant" les nombres
    return a
```

```
def pgcd(a,b):
    if b==0:
        return a
    else:
        r=a%b
        return pgcd(b,r)
```

```
def pgcd(a,b):
    if b==0:
        return a
    else:
        return pgcd(b, a%b)
```

```
# Exemple d'utilisation:
pgcd(56,42) # =>  affiche 14
```

https://www.lesmathsdherve.net/arithmetique-parcours-differencies/



https://www.lesmathsdherve.net/arithmetique-videos/

https://www.lesmathsdherve.net/arithmetique-aides/

Théorème de THALES

Rappel

Pour passer du nombre a au nombre b, on multiplie par $\frac{b}{a}$.

$$a \xrightarrow{\times \frac{b}{a}} b \qquad départ \xrightarrow{\times \frac{arrivée}{départ}} arrivée$$

Exemples

$$5 \xrightarrow{\times 3} 15 \qquad 5 \xrightarrow{\times 13} 65 \qquad 5 \xrightarrow{\times \frac{645}{5} \text{ ou } \times 129} 645 \qquad 5 \xrightarrow{\times \frac{7}{5}} 7 \qquad 7 \xrightarrow{\times \frac{3}{7}} 3$$

Comment identifier que deux triangles sont homothétiques l'un de l'autre ?

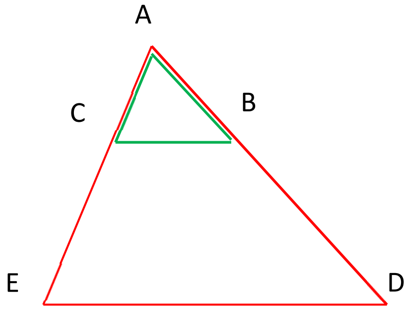
Soit ABC un triangle.

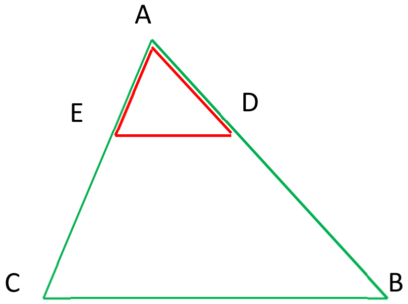
Si D∊ (AB) et E∊ (AC) et (BC)//(DE) alors ADE et ABC sont homothétiques l'un par rapport à l'autre.

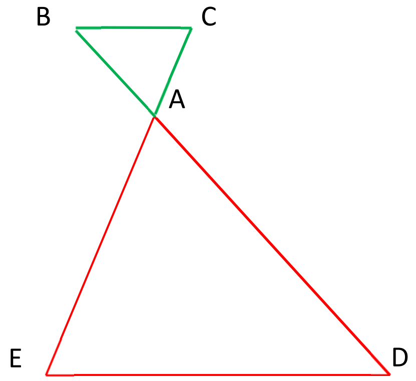
Théorème de Thalès

Soit ABC un triangle.

Si D∊ (AB) et E∊ (AC) tels que (BC)//(DE) alors $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$ $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$







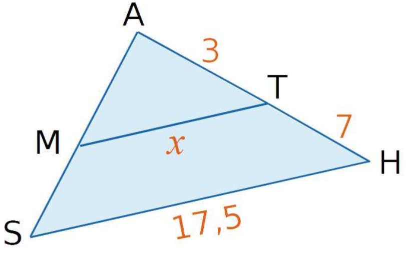
"Démonstration"

Les trois quotients intervenant dans le théorème sont les coefficients d'agrandissement/réduction permettant de passer de ABC à ADE.

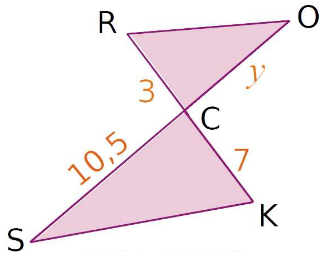
Exemples

Sur les figures ci-dessous, les distances sont en centimètres.

Calculer x et y.



(MT)//(SH)



(RO)//(SK)

Comme A, T, H et A, M, S sont alignés et comme (MT)//(HS), d'après le théorème de Thalès

$$\frac{AT}{AH} = \frac{AM}{AS} = \frac{MT}{SH}$$

$$\frac{3}{10} = \frac{AM}{AS} = \frac{x}{17,5}$$

$$x = \frac{3 \times 17,5}{10} = 5,25 \text{ cm}$$

Comme R, C, K et O, C, S sont alignés et comme (RO)//(KS), d'après le théorème de Thalès

$$\frac{CR}{CK} = \frac{CO}{CS} = \frac{RO}{SK}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{y}{10,5} = \frac{RO}{SK}$$

$$y = \frac{3 \times 10,5}{7} = 4,5 \text{ cm}$$

Propriété réciproque de Thalès - admise

Si A, B, D et A, C, E sont alignés dans cet ordre et si

$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$

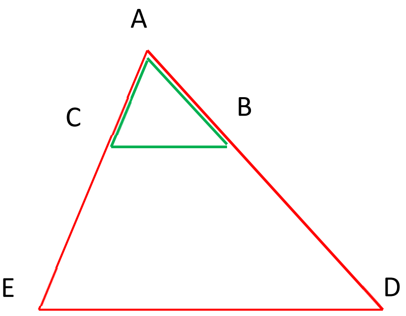
alors **(BC)//(DE)**

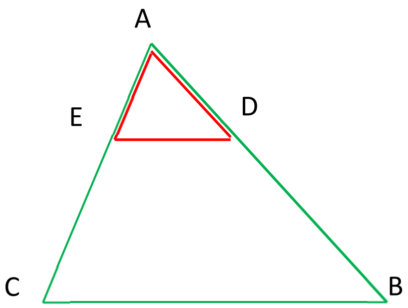
Propriété contraposée de Thalès - admise

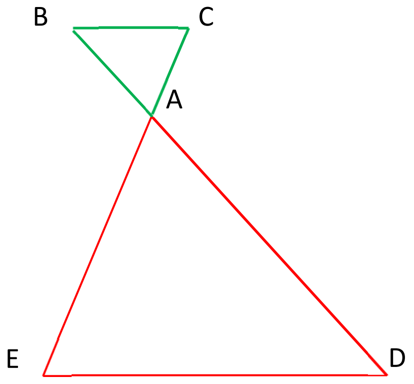
Si A, B, D et A, C, E sont alignés dans cet ordre et si

$\frac{AB}{AD}\neq\frac{AC}{AE}$

alors **(BC) et (DE) ne sont pas parallèles**

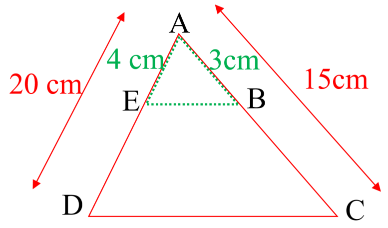


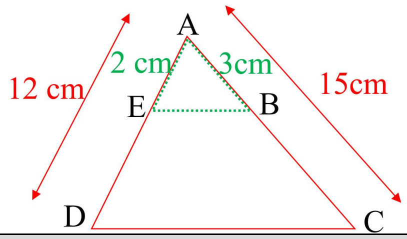




Exemples

On cherche à savoir si les droites (BE) et (CD) sont parallèles.





Si les droites (BE) et (CD) étaient parallèles, le théorème de Thalès donnerait $\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AD}$. On calcule séparément ces deux rapports

$\mathbf{\frac{AB}{AC}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}}$

$\frac{AE}{AD}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$

donc $\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AD}$ et comme A, B, C et A, E, D sont alignés dans le même ordre, d'après la propriété réciproque de Thalès alors (BE)//(CD).

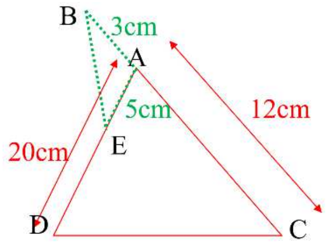
$\frac{AB}{AC}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

$\frac{AE}{AD}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

donc $\frac{AB}{AC}\neq\frac{AE}{AD}$ et comme A, B, C et A, E, D sont alignés dans le même ordre, d'après la contraposée de Thalès alors (BE) et (CD) ne sont pas parallèles.

Remarque

La condition d'alignement dans le même ordre est indispensable.



On a : $\frac{AB}{AC}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

On a aussi : $\frac{AE}{AD}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$

Donc $\frac{AB}{AC}=\frac{AE}{AD}$ et pourtant les droites (BE) et (CD) ne sont pas parallèles.

Soit B devrait appartenir à [AC], soit E devrait appartenir à [DA) sans appartenir à [DA].

PARCOURS DIFFÉRENCIÉS

MATHS

https://www.lesmathsdherve.net/thales-parcours/

https://www.lesmathsdherve.net/thales-videos-2/

https://www.lesmathsdherve.net/thales-aides/v