

Factorisations – Equations produits

Définition

Factoriser, c'est transformer une somme en un produit.

Développer, c'est transformer un produit en une somme.

Exemples

Développer

$$(x + 3)(x + 2) = x^2 + 5x + 6$$

Factoriser

Développer

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

Factoriser

Développer

$$(x + 5)(x - 5) = x^2 - 25$$

Factoriser

Remarque

Il est toujours possible de développer, mais il n'est pas toujours possible de factoriser.

Comment factoriser en reconnaissant un facteur commun ?

On coupe l'expression en « blocs » séparés par les additions et les soustractions.

On ne coupe pas en 2 une parenthèse.

On reconnaît (ou on fait apparaître) un facteur commun dans une expression.

On peut souligner le facteur commun.

On isole ce facteur commun en utilisant la propriété de simple distributivité :

$$kx + kx = kx(a + b).$$

Dans la parenthèse on place alors tout ce qui n'a pas été souligné.

Exemple

$$5x + 3x$$

$$= 5x + 3x$$

$$= x(5 + 3)$$

$$= 8x$$

Exemples

$$5x^2 - 3x + 2xy = 5x - 3x + 2xy = x(5x - 3 + 2y)$$

$$\begin{aligned} & (5x + 3)(2x - 7) + (5x + 3)(4x + 5) \\ &= (5x + 3)[(2x - 7) + (4x + 5)] \\ &= (5x + 3)[2x - 7 + 4x + 5] \\ &= (5x + 3)(6x - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (3x + 4)(5x - 2) + 7(3x + 4)(4x + 5) \\ &= (3x + 4)[(5x - 2) + 7(4x + 5)] \\ &= (3x + 4)[5x - 2 + 28x + 35] \\ &= (3x + 4)(33x + 33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (7x - 2)(2x - 7) - (5x + 4)(7x - 2) \\ &= (7x - 2)[(2x - 7) - (5x + 4)] \\ &= (7x - 2)[2x - 7 - 5x - 4] \\ &= (7x - 2)(-3x - 11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (3x + 4)(5x - 2) - 7(3x + 4)(4x + 5) \\ &= (3x + 4)[(5x - 2) - 7(4x + 5)] \\ &= (3x + 4)[5x - 2 - 28x - 35] \\ &= (3x + 4)(-23x - 37) \end{aligned}$$

Exemple complexe

$$\begin{aligned} & (3x + 5)(x - 2) + 3(5x - 10) \quad \downarrow \quad 5x - 10 = 5x - 5 \times 2 = 5(x - 2) \\ &= (3x + 5)(x - 2) + 3 \times 5(x - 2) \\ &= (x - 2)[(3x + 5) + 3 \times 5] \\ &= (x - 2)[3x + 5 + 15] \\ &= (x - 2)(3x + 20) \end{aligned}$$

Remarque

Si on ne trouve pas de facteur commun, on essaye la méthode ci-dessous.

Comment factoriser en reconnaissant une différence de 2 carrés ?

1. On transforme, si possible, l'expression en une différence de deux carrés.
2. On factorise en utilisant la propriété $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Exemples

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= x^2 - 3^2 = (x + 3)(x - 3) \\ a^2 - b^2 &= (a + b)(a - b) \\ 4x^2 - 25 &= (2x)^2 - 5^2 = (2x + 5)(2x - 5) \end{aligned}$$

$$(3x + 5)^2 - 49 = (3x + 5)^2 - 7^2 = [(3x + 5) + 7] [(3x + 5) - 7] = [3x + 5 + 7] [3x + 5 - 7] = (3x + 12) (3x - 2)$$

$$(3x + 5)^2 - (7x - 6)^2 = [(3x + 5) + (7x - 6)] [(3x + 5) - (7x - 6)] = [3x + 5 + 7x - 6] [3x + 5 - 7x + 6] \\ = (10x - 1) (-4x + 11)$$

Remarque

Si on ne trouve pas de différence de deux carrés, on essaye la méthode ci-dessous.

Comment factoriser en reconnaissant le développement de la 1^{ère} ou 2^{ème} identité remarquable ?

1. On identifie l'identité remarquable.
2. On identifie les deux « carrés ».
3. On vérifie que le double produit est le bon.
4. On factorise en utilisant une des propriétés : $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Exemple

On veut factoriser $x^2 + 6x + 9$.

Il y a trois termes et cela ressemble au développement de la première identité remarquable : $a^2 + 2ab + b^2$.

On identifie x^2 et 9 comme les carrés de x et 3.

On calcule $2 \times x \times 3 = 6x$ et on reconnaît le morceau non choisi de l'expression.

On conclue : $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = (x + 3)^2$

Exemples

$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$$

x^2 est le carré de x

25 est le carré de 5

Il y a un « + » devant le double produit.

On vérifie que $2 \times x \times 5$ est bien égal au troisième terme : $10x$

$$x^2 - 14x + 49 = (x - 7)^2$$

x^2 est le carré de x

49 est le carré de 7

Il y a un « - » devant le double produit.

On vérifie que $2 \times x \times 7$ est bien égal au troisième terme : $14x$

$$16x^2 + 24x + 9 = (4x + 3)^2$$

Remarque

On veut factoriser $x^2 + 7x + 49$

x^2 et 49 sont les carrés de x et 7

On calcule $2 \times x \times 7 = 14x$. On ne trouve pas $7x$

On ne peut pas factoriser $x^2 + 7x + 49$ avec cette méthode.

Propriété équation produit - admise

♥ Un produit est nul si et seulement si l'un, au moins, des facteurs est nul.

Exemple

On veut résoudre l'équation $(2x + 5) (5x - 3) = 0$

$$(2x + 5) (5x - 3) = 0$$

Un produit est nul si et seulement si l'un, au moins, des facteurs est nul.

$$2x + 5 = 0$$

$$2x = -5$$

$$x = -2,5$$

Si $x = -2,5$ alors $(x + 5) (5x - 3)$

$$= (2 \times (-2,5) + 5) \times (5 \times (-2,5) - 3)$$

$$= 0$$

Si $x = 0,6$ alors $(2x + 5) (5x - 3)$

$$= (2 \times 0,6 + 5) \times (5 \times 0,6 - 3)$$

$$= 0$$

Les solutions de l'équation sont -2,5 et 0,6.

On peut aussi écrire : $S = \{-2,5 ; 0,6\}$

On réécrit l'équation

On cite la propriété

On résout séparément les équations.

Bien laisser le trait vertical.

On vérifie en testant si les nombres trouvés sont solution de l'équation

On conclue par une phrase

Remarques

Pour utiliser cette propriété, il faut que l'on ait un produit.

Pour cela, il peut être nécessaire de factoriser l'expression ; c'est même le principal intérêt de la factorisation.

Propriété

L'équation $x^2 = a$ admet :

- aucune solution si $a < 0$.
- une seule solution si $a = 0$; la solution est 0.
- deux solutions si $a > 0$; les solutions sont \sqrt{a} et $-\sqrt{a}$.

Démonstration

Si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution car un carré ne peut pas être négatif.

Si $a > 0$ on a alors : $a = \sqrt{a}^2$

L'équation $x^2 = a$ devient $x^2 = \sqrt{a}^2$ soit $x^2 - \sqrt{a}^2 = 0$ soit $(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) = 0$

Or « un produit est nul si et seulement si l'un, au moins, des facteurs est nul »,

$$\begin{array}{l|l} x + \sqrt{a} = 0 & x - \sqrt{a} = 0 \\ x = -\sqrt{a} & x = \sqrt{a} \end{array}$$

Exemples

L'équation $x^2 = -4$ n'a pas de solution car $-4 < 0$.

L'équation $x^2 = 0$ a une seule solution 0.

L'équation $x^2 = 64$ a deux solutions : $\sqrt{64}$ et $-\sqrt{64}$ soit 8 et -8.

L'équation $x^2 = 11$ a deux solutions : $\sqrt{11}$ et $-\sqrt{11}$.

Exemple complexe

Résoudre l'équation $(x + 3)^2 = 7$.

$$(x + 3)^2 = 7$$

$$\begin{array}{l|l} x + 3 = \sqrt{7} & x + 3 = -\sqrt{7} \\ x = -3 + \sqrt{7} & x = -3 - \sqrt{7} \end{array}$$

Les solutions sont $-3 + \sqrt{7}$ et $-3 - \sqrt{7}$