Dans la correction, seul ce qui en bleu est inutile.

Triangles semblables

Brevet des collèges Métropole La Réunion 1er juillet 2019

Dans cet exercice, on donnera, si nécessaire, une valeur approchée des résultats au centième près. Pour construire le décor d'une pièce de théâtre (Figure 1), Joanna dispose d'une plaque rectangulaire ABCD de 4 m sur 2 m dans laquelle elle doit découper les trois triangles du décor avant de les superposer. Elle propose un découpage de la plaque (Figure 2).

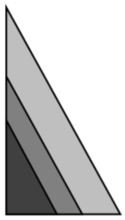


Figure 1

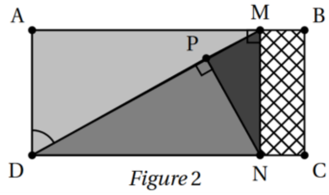


Figure 2

Le triangle ADM respecte les conditions suivantes :

- le triangle ADM est rectangle en A
- AD = 2 m
- $\widehat{ADM}=60°$

1. Montrer que [AM] mesure environ 3,46 m.
   La partie de la plaque non utilisée est représentée en quadrillé sur la figure 2.
2. Calculer une valeur approchée au centième de la proportion de la plaque qui n'est pas utilisée.
3. Pour que la superposition des triangles soit harmonieuse, Joanna veut que les trois triangles AMD, PNM et PDN soient semblables.
   Démontrer que c'est bien le cas.
4. Joanna aimerait que le coefficient d'agrandissement pour passer du triangle PDN au triangle AMD soit plus petit que 1,5. Est-ce le cas ? Justifier.

1. Dans ADM rectangle en A,

- on connait :
  - $\widehat{D}$
  - AD : adjacent
- on cherche :
  - AM : oppose

$\text{Cos} = \dfrac{\text{Adj}}{\text{Hyp}} \qquad \text{Sin} = \dfrac{\text{Opp}}{\text{Hyp}} \qquad \text{Tan} = \dfrac{\text{Opp}}{\text{Adj}}$

La formule qui lie adjacent et opposé est la tangente.

$$\tan(\widehat{D}) = \frac{AM}{AD}$$ On écrit la formule avec les lettres

$$\tan(60°) = \frac{AM}{2}$$ On remplace avec les valeurs de l'énoncé

$$\frac{\tan(60°)}{1} = \frac{AM}{2}$$

⚠ Ne pas oublier l'unité

$$AM = \frac{\tan(60°) \times 2}{1} \approx \boxed{\mathbf{3,46\ m}}$$

2. Comme A, M et B esont alignbés dasn cet ordre alors BM = AB – AM = 4 – 3,46 = 0,54 m.

Je calcule l'aire des deux rectangles.

A_{ABCD} = AB × BC = 4 × 2 = 8 m²

A_{BCNM} = BC × BM = 2 × 0,54 = 1,08 m²

La proportion cherchée est $\frac{1,08}{8} \approx \boxed{\mathbf{0,14}}$

3. Pour prouver que les triangles semblables, on va montrer que les angles sont égaux.

Dans le triangle ADM, $\widehat{AMD} = 180 - (\widehat{A} + \widehat{D}) = 180 - (90 + 60) = 30°$

Comme $\widehat{ADN}$ est un angle droit, alors $\widehat{MDN} = \widehat{ADN} - \widehat{ADM} = 90 - 60 = 30°$

Comme $\widehat{AMN}$ est un angle droit, alors $\widehat{DMN} = \widehat{AMN} - \widehat{AMD} = 90 - 30 = 60°$

Dans le triangle DNP, $\widehat{\mathrm{DNP}} = 180 - (\widehat{\mathrm{P}} + \widehat{\mathrm{D}}) = 180 - (90 + 30) = 60°$
Dans le triangle MNP, $\widehat{\mathrm{MNP}} = 180 - (\widehat{\mathrm{P}} + \widehat{\mathrm{M}}) = 180 - (90 + 60) = 30°$
On a donc trois triangles qui ont pour angles 30°, 60° et 90° donc **les trois triangles AMD, PNM et PDN sont semblables**.

4. On connaît déjà la longueur DN (qui est égales à AM) ; c'est l'hypoténuse du triangle DNP.
Il faut maintenant calculer l'hypoténuse du triangle ADM.

Il y a deux méthodes, mais la seconde est déconseillée car on utilise une valeur approchée (la longueur de AM) et on obtient donc une valeur approchée de la réponse

Dans ADM rectangle en A,

$$\cos(\widehat{\mathrm{D}}) = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DM}}$$

$$\cos(60°) = \frac{2}{\mathrm{DM}}$$

$$\frac{\cos(60°)}{1} = \frac{2}{\mathrm{DM}}$$

$$\mathrm{DM} = \frac{1 \times 2}{\cos(60°)} = 4 \text{ m}$$

Dans ADM rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore

$\mathrm{DM}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{AM}^2$

$\mathrm{DM}^2 = 2^2 + 3{,}46^2$

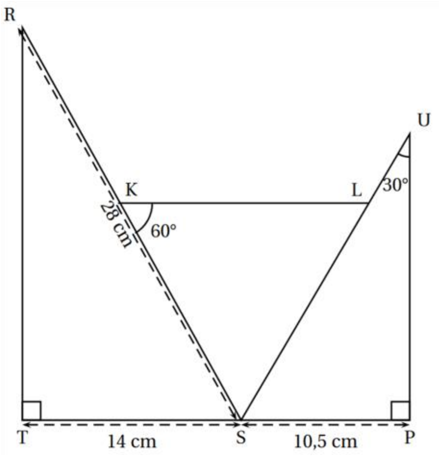
$\mathrm{DM}^2 = 15{,}9716$

$\mathrm{DM} = \sqrt{15{,}0716} \approx 4$ m

Pour passer du triangle DNP vers le triangle ADM, on connaît les hypoténuses.
Le coefficient d'agrandissement est $\frac{\mathrm{DM}}{\mathrm{DN}} = \frac{4}{3{,}46} \approx 1{,}15$; **c'est bien** inférieur à 1,5.

Brevet des collèges Grèce 18 juin 2019

1. Montrer que la mesure de l’angle $\widehat{TSR}$ est 60°.
2. Démontrer que les triangles SRT et SUP sont semblables.
3. Déterminer le coefficient de réduction liant les triangles SRT et SUP.
4. Calculer la longueur SU.
5. Quelle est la nature du triangle SKL ? A justifier.



Données :
TSR et SPU sont des triangles rectangles respectivement en T et en P.
TS = 14 cm
SP = 10,5 cm
RS = 28 cm
$\widehat{SKL} = 60°$; $\widehat{SUP} = 30°$
Les points T, S et P sont alignés
Les points R, K et S sont alignés
Les points S, L et U sont alignés

1. Dans RST rectangle en T,

- on cherche :
  - $\hat{S}$
- on connait :
  - RS : hypoténuse
  - ST : adjacent

$\text{Cos} = \dfrac{\text{Adj}}{\text{Hyp}}$ $\quad \text{Sin} = \dfrac{\text{Opp}}{\text{Hyp}}$ $\quad \text{Tan} = \dfrac{\text{Opp}}{\text{Adj}}$

La formule qui lie hypoténuse et adjacent est le cosinus.

$$\cos(\hat{S}) = \frac{ST}{RS}$$

$$\cos(\hat{S}) = \frac{14}{28}$$

$$\widehat{RST} = \arccos\left(\frac{14}{28}\right) = \boxed{60°}$$

2. Dans le triangle RST, $\widehat{SRT} = 180 - (\hat{T} + \hat{S}) = 180 - (90 + 60) = 30°$
Dans le triangle PSU, $\widehat{PSU} = 180 - (\hat{P} + \hat{U}) = 180 - (90 + 30) = 60°$
Les deux triangles ont des angles égaux, donc $\boxed{\textbf{SRT et SUP sont semblables}}$.

3. Dans les deux triangles SRT et SUP on connaît la mesure du côté touchant l’angle droit et l’hypoténuse.
Le coefficient de réduction est $\frac{PS}{ST} = \frac{10,5}{14} = \boxed{\frac{3}{4}}$ ou 0,75.

4.

Il y a deux méthodes

Dans PSU rectangle en P,

$$\sin(\hat{U}) = \frac{PS}{SU}$$

$$\sin(30°) = \frac{10,5}{SU}$$

$$\frac{\sin(30°)}{1} = \frac{10,5}{SU}$$

$$SU = \frac{1 \times 10,5}{\sin(30°)} = \boxed{21 \text{ cm}}$$

Comme les triangles RST et PSU sont semblables, alors les côtés des triangles sont proportionnels.

On a vu dans la question précédente que le coefficient d’agrandissement était $\frac{4}{3}$ donc le coefficient de réduction est $\frac{3}{4}$.

Dans la rféduction, l’hypoténuse de RST devient l’hypoténuse de PSU.

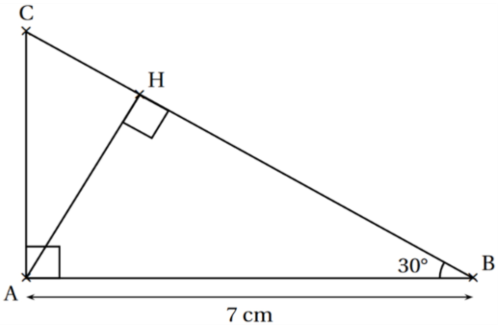
Donc SU = $\frac{3}{4}$ × RS = $\frac{3}{4}$ × 28 = $\boxed{\textbf{21 cm}}$.

5. L’angle $\widehat{TSP}$ est un angle plat donc $\widehat{RSU} = 180 - (\widehat{TSR} + \widehat{USP}) = 180 - (60 + 60) = 60°$
Dans le triangle KLS, $\widehat{KLS} = 180 - (\hat{K} + \hat{S}) = 180 - (60 + 60) = 60°$
Les trois angles de KLS sont égaux et mesurent 60° donc $\boxed{\textbf{KLS est équilatéral}}$.

Brevet des collèges Pondichéry 3 mai 2018

On considère ci-contre un triangle ABC rectangle en A tel que $\widehat{ABC}$=30° et AB = 7 cm. H est le pied de la hauteur issue de A.

1. Tracer la figure en vraie grandeur sur la copie. Laisser les traits de construction apparents sur la copie.
2. Démontrer que AH=3,5 cm.
3. Démontrer que les triangles ABC et HAC sont semblables.
4. Déterminer le coefficient de réduction permettant de passer du triangle ABC au triangle HAC.



1. Je pense que vous n'avez pas besoin de moi pour cette questoin mais faites la quand même pour vous assurer que vous savez encore effectuer cess tracés de triangles.

2. Dans ABH rectangle en H,

$$\sin(\widehat{B}) = \frac{AH}{AB}$$

$$\sin(30°) = \frac{AH}{7}$$

$$\frac{\sin(30°)}{1} = \frac{AH}{7}$$

$$AH = \frac{7 \times \sin(30°)}{1} = \boxed{\mathbf{3,5\ cm}}$$

3. Dans le triangle ABH, $\widehat{BAH} = 180 - (\widehat{H} + \widehat{B}) = 180 - (90 + 30) = 60°$
Dans le triangle ABC, $\widehat{ACB} = 180 - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 180 - (90 + 30) = 60°$
Les triangles ABC et ABH ont des angles qui mesurent 30°, 60° et 90° donc **ils sont semblables**.

4. Dans le triangle ABH, on connaît l'hypoténuse et le côté adjacent à l'angle de 60°.
Dans le triangle ABC, on connaît le côté adjacent à l'angle de 30° ; il faut trouver soit l'hypoténuse, soit le côté adjacent à l'angle de 60°. Je vais chercher l'hypoténuse BC.

Dans ABC rectangle en A,

$$\cos(\widehat{B}) = \frac{AB}{BC}$$

$$\cos(30°) = \frac{7}{BC}$$

$$\frac{\cos(30°)}{1} = \frac{7}{BC}$$

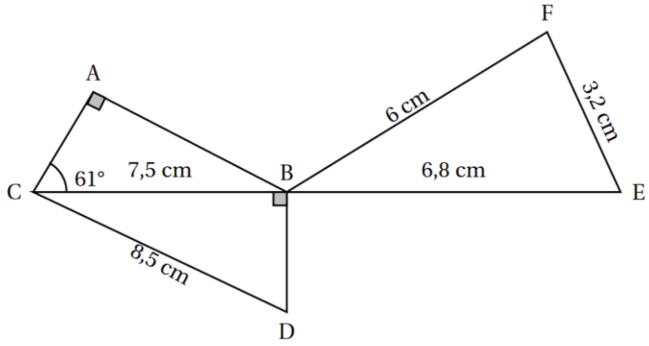
$$BC = \frac{7 \times 1}{\cos(30°)} \approx 8{,}08\ \text{cm}$$

Le coefficient de réduction est $\frac{AB}{BC} = \frac{7}{8{,}08} \approx \boxed{\mathbf{0,87}}$. La valeur exacte est cos(30°) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$; elle n'est pas demandée

Brevet des collèges Métropole La Réunion 28 juin 2018

La figure ci-contre n'est pas représentée en vraie grandeur.
Les points C, B et E sont alignés.
Le triangle ABC est rectangle en A.
Le triangle BDC est rectangle en B.

1. Montrer que la longueur BD est égale à 4 cm.
2. Montrer que les triangles CBD et BFE sont semblables.
3. Sophie affirme que l'angle $\widehat{BFE}$ est un angle droit. A-t-elle raison ?
4. Max affirme que l'angle $\widehat{ACD}$ est un angle droit. A-t-il raison ?



1. Dans BCD rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore

$CD^2 = BC^2 + BD^2$

$8{,}5^2 = 7{,}5^2 + BD^2$

$72{,}25 = 56{,}25 + BD^2$

-56,25 -56,25

$16 = BD^2$

BD = $\sqrt{16}$ = $\boxed{\textbf{4 cm}}$

2. Le plus grand côté des triangles sont BE et CD ; $\frac{CD}{BE} = \frac{8{,}5}{6{,}8} = 1{,}25$

Le plus petit côté des triangles sont EF et BD ; $\frac{BD}{EF} = \frac{4}{3{,}2} = 1{,}25$

Le dernier côté des triangles sont BF et BC ; $\frac{BC}{BF} = \frac{7{,}5}{6} = 1{,}25$

Donc $\frac{CD}{BE} = \frac{BD}{EG} = \frac{BC}{BF}$ donc les côtés des triangles sont proportionnels, donc **les triangles BCD et BEF sont semblables**.

3. Si BEF était rectangle, l'hypoténuse serait [BE] car c'est le plus grand côté

BE^2	$BF^2 + FE^2$
$= 6{,}8^2$	$= 6^2 + 3{,}2^2$
$= 46{,}24$	$= 46{,}24$

Donc $BE^2 = BF^2 + FE^2$, d'après la propriété réciproque de Pythagore, alors BFE est rectangle en F, donc $\widehat{BFE}$ est un angle droit et donc **Sophie a raison**.

4. Dans BCD rectangle en B,

$$\cos(\hat{C}) = \frac{BC}{CD}$$

$$\cos(\hat{C}) = \frac{7{,}5}{8{,}5}$$

$$\widehat{BCD} = \arccos\left(\frac{14}{28}\right) \approx 28{,}07°$$

$$\widehat{ACD} = \widehat{ACB} + \widehat{BCD} = 61 + 28{,}07 = 89{,}07° \neq 90°$$

donc **Max n'a pas raison**.