

Généralités

Exemple de la balle

On a lancé une balle en l'air.

Sur l'axe des abscisses se trouve le temps en secondes et sur l'axe des ordonnées se trouve la hauteur de la balle en mètres.

La hauteur de la balle dépend du temps ; on dit qu'on peut donner la hauteur de la balle en fonction du temps. On appelle x le temps et f la hauteur de la balle en fonction du temps. On dit qu'on peut exprimer f en fonction de x .

Après 0 seconde (au départ), la hauteur de la balle est de 15 m. On dit que 15 est l'**image** de 0 par f et on note $f(0) = 15$, qui se lit *f de 0 égal 15*.

Après 1 seconde, la hauteur de la balle est à son maximum ; elle est de 20 m.

On dit que 20 est l'**image** de 1 par f et on note $f(1) = 20$.

Après 2 secondes, la hauteur de la balle est de 15 m.

On dit que 15 est l'**image** de 2 par f et on note $f(2) = 15$.

Après 3 secondes, la hauteur de la balle est de 0 m.

On dit que 0 est l'**image** de 3 par f et on note $f(3) = 0$.

On a déterminé (par un calcul de physique) que la hauteur en fonction du temps était donnée par la formule : $-5x^2 + 10x + 15$.

On notera :

$$f(x) = -5x^2 + 10x + 15$$

ou

$$f : x \rightarrow -5x^2 + 10x + 15$$

On a vu qu'on pouvait lire l'image d'un nombre sur le graphique. Il est aisé de calculer cette image en utilisant la forme algébrique de la fonction.

Par exemple, on cherche la hauteur de la balle après 1,5 s. On va calculer $f(1,5)$:

$$f(1,5) = -5 \times 1,5^2 + 10 \times 1,5 + 15 = 18,75.$$

On peut interpréter ce résultat en disant que la hauteur de la balle après 1,5 s est de 18,75 m.

On a vu que la hauteur de la balle après 0 ou 2 secondes était la même (15 m). On dira que 0 et 2 secondes sont **des antécédents** de 15 m.

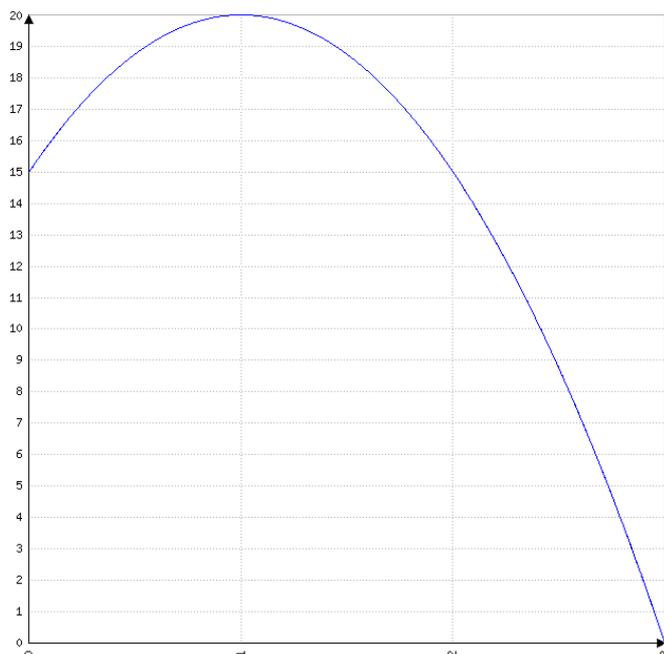
Le nombre 20 a un seul **antécédent** 1 s.

Le nombre 22 n'a pas d'**antécédent** car la balle n'est jamais montée jusqu'à 22 m.

Remarque

Un nombre a toujours une et une seule image par une fonction.

Un nombre peut avoir : 0, 1 ou plusieurs antécédents par une fonction.



Comment déterminer l'image d'un nombre par une fonction ?

Par exemple, on cherche l'image de 0,5 par la fonction f définie par $f(x) = -5x^2 + 10x + 15$.

1^{er} cas : méthode graphique

On se positionne à 0,5 sur l'axe des abscisses.

On « monte » (ou « descend ») jusqu'à croiser la courbe de la fonction.

On « part horizontalement » jusqu'à l'axe des ordonnées et on lit la valeur.

On trouve ici que $f(0,5) \approx 18,5$.

Par lecture graphique, on trouve une valeur dont on ne sait pas si elle est exacte.

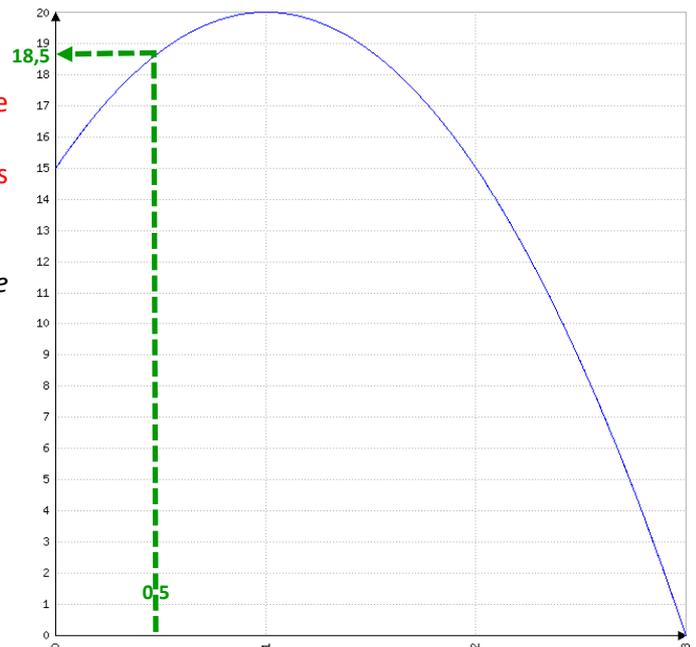
2^{ème} cas : par le calcul

Il suffit de remplacer x par 0,5 dans la formule

$$f(x) = -5x^2 + 10x + 15.$$

$$f(0,5) = -5 \times 0,5^2 + 10 \times 0,5 + 15 = 18,75.$$

On trouve une valeur exacte.



Comment déterminer les antécédents d'un nombre par une fonction ?

1^{er} cas : méthode graphique

Par exemple, on cherche les antécédents de 17 par la fonction f définie par $f(x) = -5x^2 + 10x + 15$.

On se positionne à 17 sur l'axe des ordonnées.

On « part horizontalement » jusqu'à croiser la courbe de la fonction.

On « monte » (ou descend) jusqu'à l'axe des abscisses et on lit les valeurs.

On trouve ici que les antécédents de 17 sont environ 0,2 et 1,8. Par lecture graphique, on trouve des valeurs dont on ne sait pas si elles sont exactes.

Bien penser à chercher tous les antécédents.

2^{ème} cas : par le calcul

Par exemple, on cherche les antécédents de 15 par la fonction f définie par $f(x) = -5x^2 + 10x + 15$.

Il faut résoudre une équation. **ATTENTION**, ce n'est pas toujours possible.

Au lycée, on verra comment trouver une valeur approchée avec la calculatrice graphique.

On cherche les nombres x tels que $f(x) = 15$

$$\text{donc } -5x^2 + 10x + 15 = 15$$

$$\text{donc } -5x^2 + 10x = 0$$

$$\text{donc } x(-5x + 10) = 0$$

Or « si un produit est nul, alors l'un, au moins, des facteurs est nul »

$$\text{donc } x = 0$$

ou

$$-5x + 10 = 0$$

$$-5x = -10$$

$$x = 2$$

Les antécédents de 15 sont 0 et 2.



Comment construire la représentation graphique d'une fonction ?

1. On construit un « tableau de valeurs ».
2. On construit un repère et on place les points dans le repère.
3. On relie les points.

Attention, les points ne sont pas obligatoirement alignés ; il faut donc les relier en formant une courbe et non pas nécessairement une droite.

Exemple

On veut construire la représentation graphique de la fonction f définie par la formule $f(x) = 2x^2 - 2x - 12$ pour x appartenant à l'intervalle $[-4 ; 4]$

On prend n'importe quels nombres.

En général, on prend les bornes de l'intervalle (ici, -4 et 4) et on place des valeurs régulièrement. Ici, le pas (l'écart entre deux nombres) est 1.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	28	12	0	-8	-12	-12	-8	0	12

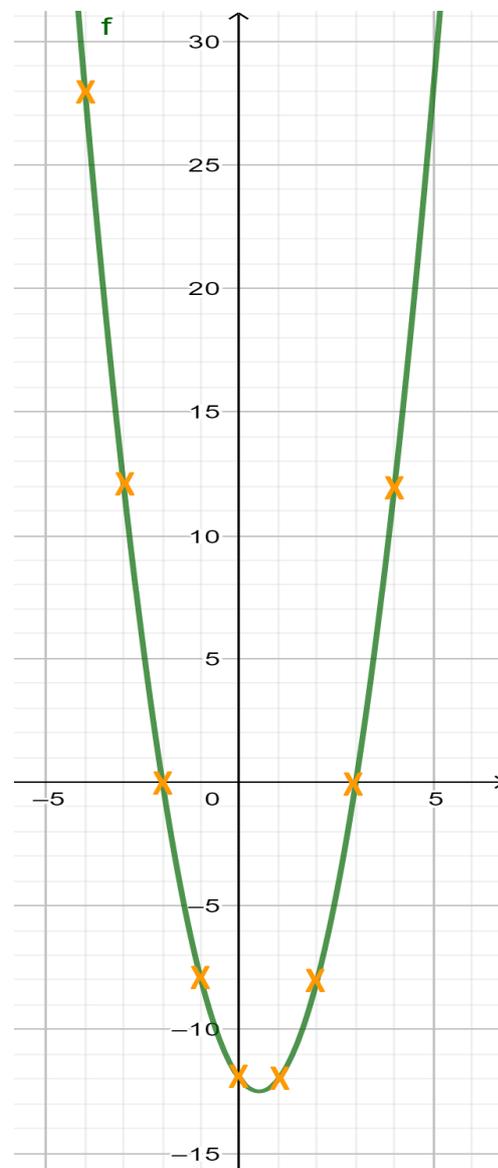
On calcule les images de la première ligne avec la formule

$$f(x) = 2x^2 - 2x - 12$$

Ce tableau de valeur peut être calculé avec la machine.

Sur la CASIO, taper

MODE 4 :table	Place la calculatrice en mode tableau de valeur
$f(X) = 2X^2 - 2X - 12$ EXE	On rentre la fonction en utilisant la touche X de la calculatrice.
Début ? -4 EXE	On rentre le point de départ du tableau de valeur.
Fin ? 4 EXE	On rentre le point d'arrivée du tableau de valeur.
Pas ? 1 EXE	On rentre le pas du tableau de valeur (l'écart entre deux nombres).
MODE 1 :comp	On obtient le tableau de valeur Pour revenir au mode « normal »



Fonctions affines et linéaires

Définition

Soit p et q deux nombres.

Une fonction est dite **linéaire** si elle peut se mettre sous la forme $f(x) = p \times x$

Une fonction est dite **affine** si elle peut se mettre sous la forme $f(x) = p \times x + q$

Exemples

Fonction	Linéaire ?	Affine ?
$f(x) = 3x$	Oui	Oui car $3x = 3x + 0$
$g(x) = -6x$	Oui	Oui car $-6x = -6x + 0$
$h(x) = 5x + 3$	Non	Oui
$i(x) = 7$	Non	Oui car $7 = 0x + 7$
$j(x) = \cos(x)$	Non	Non
$k(x) = x^2$	Non	Non

Propriété admise

Une situation de proportionnalité de coefficient p

- a une représentation graphique qui est une droite qui passe par l'origine du repère,
- correspond à la fonction linéaire $f(x) = p \times x$.

Soit $f(x) = p \times x + q$ une fonction affine.

Sa représentation graphique est une droite.

Exemple

Gabriel souhaite acheter des fraises pour faire de la confiture. Sur le marché, il a trouvé des fraises de France à 2,5€ le kilogramme.

Le prix des fraises est proportionnel à la masse de fraises.

Le coefficient de proportionnalité est 2,5.

On appelle x la masse de fraises en kilogrammes.

Cela correspond à la fonction linéaire $f(x) = 2,5 x$.

Marine est plus courageuse. Elle a trouvé un producteur qui lui offre de ramasser ses fraises pour 1,5€ le kilogramme après paiement d'une redevance forfaitaire de 20€.

Le prix des fraises chez ce producteur est donné par la fonction affine $g(x) = 1,5 x + 20$.

Comment tracer la représentation graphique d'une fonction linéaire ou affine ?

Comme leurs représentations graphiques sont des droites, il suffit de placer 2 points.

Afin de vérifier, il est intéressant d'en placer 3.

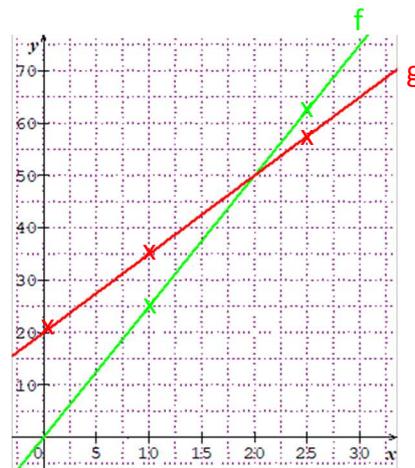
On construit donc un tableau de valeur avec 3 points.

Exemple des fraises

$$f(x) = 2,5 x$$

$$g(x) = 1,5 x + 20$$

x	0	10	25
$f(x)$	0	25	62,5
$g(x)$	20	35	57,5



Comment déterminer les antécédents d'un nombre par une fonction affine ?

On cherche les antécédents de a par la fonction affine $f(x) = p x + q$

Il suffit de résoudre l'équation $p x + q = a$

Exemple des fraises

On cherche combien Marine peut acheter de fraises avec 38€.

On cherche les antécédents de 38 donc les nombres x tels que $g(x) = 38$ donc $1,5 x + 20 = 38$

$$1,5 x + 20 = 38$$

$$1,5 x = 18$$

$$x = 12$$

L'antécédent de 38 est 12.

On interprète ce résultats en disant que Marie peut donc acheter 12kg de fraises.

Propriété

Soit $f(x) = p x + q$ une fonction affine.

La représentation graphique de f passe par le point de coordonnées $(0 ; q)$.

Le nombre q est appelé *ordonnée à l'origine*.

Si x augmente de 1 alors $f(x)$ augmente de p .

Le nombre p est appelé *coefficient directeur*

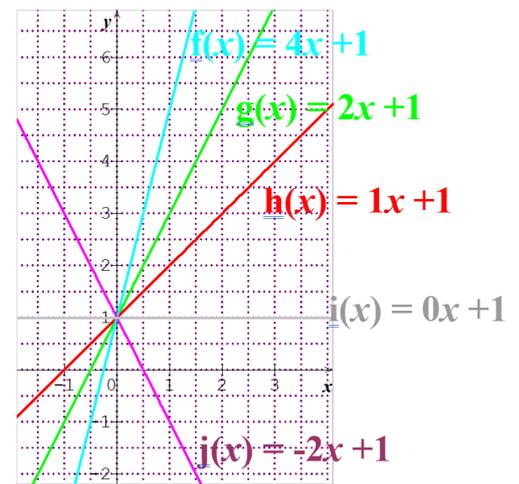
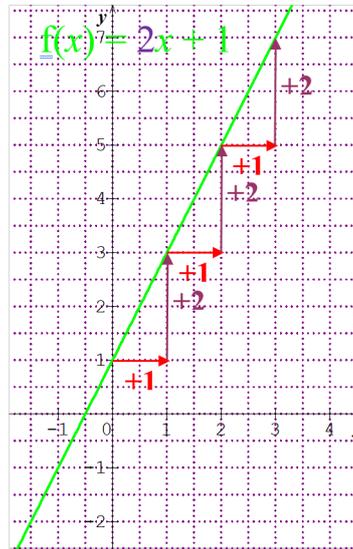
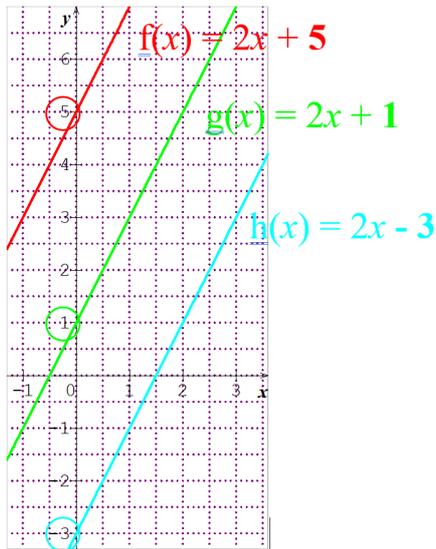
Démonstration

Si $x = 0$ alors $f(x) = f(0) = p \times 0 + q = q$, donc si $x = 0$ alors la représentation graphique de f passe par le point de coordonnées $(0 ; q)$.

$$f(x + 1) = p (x + 1) + q = p x + p + q = p x + q + p = f(x) + p$$

Donc si x augmente de 1 alors $f(x)$ augmente de p .

Exemples



Remarque

Deux fonctions qui ont le même coefficient directeur ont des représentations graphiques qui sont parallèles.

Propriété

Soit $f(x) = p x + q$ une fonction affine.

Soit x_1 et x_2 deux nombres et $f(x_1)$ et $f(x_2)$ leurs images.

$$p = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Démonstration

$$f(x_1) = p x_1 + q \quad f(x_2) = p x_2 + q$$

$$f(x_2) - f(x_1) = p x_2 + q - (p x_1 + q)$$

$$f(x_2) - f(x_1) = p x_2 + q - p x_1 - q$$

$$f(x_2) - f(x_1) = p x_2 - p x_1$$

$$f(x_2) - f(x_1) = p (x_2 - x_1)$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = p$$

Exemple 1

Soit $f(x) = p x + q$ une fonction affine tel que $f(2) = 5$ et $f(6) = 21$ leurs images.
Trouver l'expression algébrique de f .

Comme f est une fonction affine, on peut utiliser la formule $p = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ avec $x_1 = 2$, $f(x_1) = 5$, $x_2 = 6$ et $f(x_2) = 21$.

$$\text{On a } p = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(6) - f(2)}{6 - 2} = \frac{21 - 5}{6 - 2} = \frac{16}{4} = 4$$

$$\text{Donc } f(x) = 4x + q.$$

Dans l'énoncé On remplace x par 2 dans la formule $f(x) = 4x + q$

↓ ↓

$$\text{On a } f(2) = 5 \text{ et } f(2) = 4 \times 2 + q$$

$$\text{donc } 5 = 4 \times 2 + q$$

$$\text{donc } 5 = 8 + q$$

$$\text{donc } -3 = q$$

$$\text{donc } f(x) = 4x - 3$$

Exemple 2

Soit A(4 ; 7) et B(6 ; 11) deux points.

Trouver l'expression algébrique de la fonction affine f dont la représentation graphique passe par les points A et B.

Soit C(5 ; 9) et D (8 ; 17)

Les points C et D appartiennent-ils à la droite (AB) ?

Soit $f(x) = px + q$ la fonction affine dont la représentation graphique passe par les points A et B.

On a $f(4) = 7$ et $f(6) = 11$

On a $x_1 = 4$ et $f(x_1) = 7$ et $x_2 = 6$ et $f(x_2) = 11$

Comme f est une fonction affine, on peut utiliser la formule $p = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

$$\text{Donc } p = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} = \frac{11 - 7}{6 - 4} = \frac{4}{2} = 2$$

Donc $f(x) = 2x + q$.

On a $f(4) = 7$ et $f(4) = 2 \times 4 + q$

donc $7 = 2 \times 4 + q$

donc $7 = 8 + q$

donc $-1 = q$

donc $f(x) = 2x - 1$

$f(5) = 2 \times 5 - 1 = 9$ donc $C \in (AB)$.

$f(8) = 2 \times 8 - 1 = 15 \neq 17$ donc $D \notin (AB)$.

Soit M (x ; y) un point sur cette droite.

Les coordonnées de ce point vérifient l'équation $y = 2x - 1$; on dit que $y = 2x - 1$ est l'équation de la droite (AB).

Pourcentages

Rappel

Prendre une fraction d'une quantité, c'est multiplier la fraction par cette quantité.

Le mot français « de » se traduit en mathématiques par une multiplication.

Exemple

Prendre $\frac{3}{5}$ de 120€, c'est prendre $\frac{3}{5} \times 120 = 72$ €.

Prendre 12% de 45€, c'est prendre $\frac{12}{100}$ de 45€, ce qui revient à prendre $\frac{12}{100} \times 45 = 5,40$ €.

Comment calculer le produit d'une fraction par une quantité ?

$$\frac{a}{b} \times c = (a \div b) \times c$$

$$\frac{a}{b} \times c = (a \times c) \div b$$

$$\frac{a}{b} \times c = (c \div b) \times a$$

Exemples

$$\begin{aligned} \frac{10}{5} \times 7 &= (10 \div 5) \times 7 \\ &= 2 \times 7 = 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{5}{3} \times 6 &= (5 \times 6) \div 3 \\ &= 30 \div 3 = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{7}{5} \times 15 &= (15 \div 5) \times 7 \\ &= 3 \times 7 = 21 \end{aligned}$$

Propriété

Ajouter $p\%$ à une quantité revient à la multiplier par $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

Soustraire $p\%$ à une quantité revient à la multiplier par $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$.

Démonstration

Soit Q la quantité.

$p\%$ de Q c'est $\frac{p}{100} \times Q$

Si on ajoute $p\%$ à Q , on trouve $Q + \frac{p}{100} \times Q = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \times Q$.

Si on soustrait $p\%$ à Q on trouve $Q - \frac{p}{100} \times Q = \left(1 - \frac{p}{100}\right) \times Q$.

Exemple 1

Paule va en courses. Ce sont les soldes et les prix sont soldés à -15%.

Quel sera le prix soldé d'un gilet dont le prix normal est 74€ ?

Calculons le prix soldé.

$$74 \times \left(1 - \frac{15}{100}\right) = 74 \times 0,85 = 62,90$$

Le prix soldé est 62,90€.

Exemple 2

Le taux de TVA est de 33,3%.

a. Le prix HT est de 126 €. Quel est le prix TTC ?

b. Le prix TTC est de 150 €. Quel est le prix HT ?

Pour passer du prix HT au prix TTC, on multiplie par $1 + \frac{33,3}{100} = 1,333$ donc pour passer du prix TTC au prix HT, on divise par 1,333

a. Calculons le prix TTC.

$$126 \times 1,333 \approx 167,96$$

Le prix TTC est d'environ 167,96 €.

b. Calculons le prix HT.

$$150 \div 1,333 \approx 112,53$$

Le prix HT est d'environ 112,53 €.