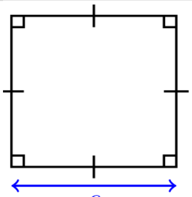
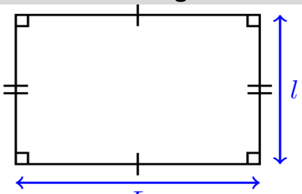
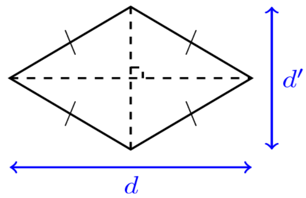
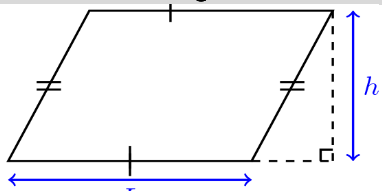
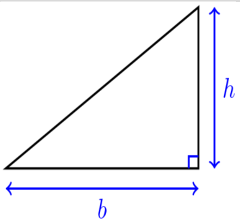
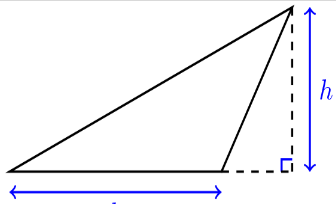
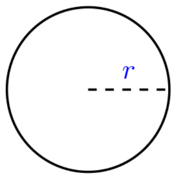
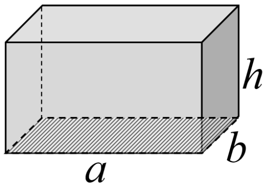
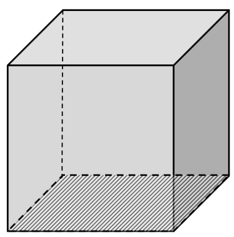
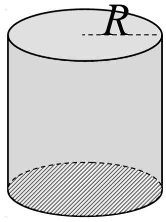
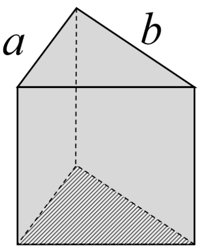
SOLIDES, agrandissement/réduction

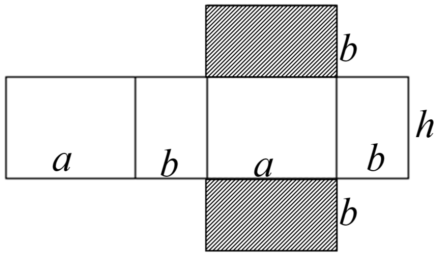
I – Rappel sur les aires

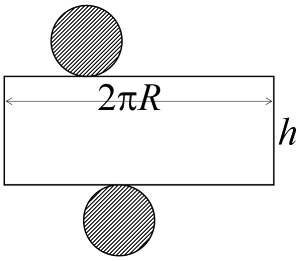
Carré	Rectangle	Losange	Parallélogramme
			
A = c^2	A = $L \times l$	A = $d \times d' \div 2$	A = $L \times h$

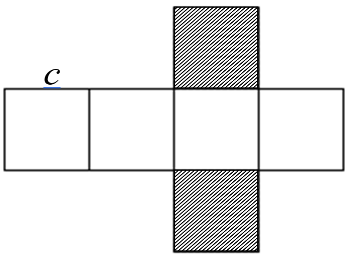
Triangle rectangle	Triangle quelconque	Trapèze	Disque
			
$\mathbf{A} = \dfrac{\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{h}}{\mathbf{2}}$		$\mathbf{A} = \dfrac{(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{h}}{\mathbf{2}}$	A = $\pi \times r^2$

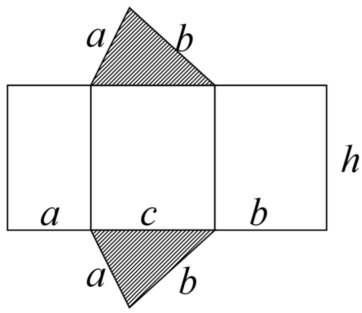
II – La famille des prismes

Parallélépipède rectangle Pavé droit	Cube	Cylindre	Prisme droit
			
♥ Volume = Aire de la base × hauteur			
V = $a \times b \times h$	V = $c \times c \times c = c^3$	V = $\pi \times R^2 \times h$	V = aire triangle × h

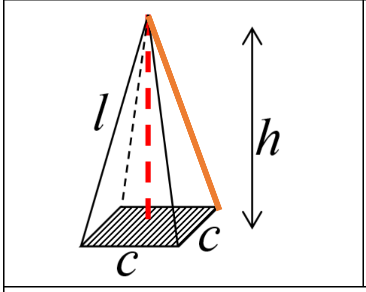
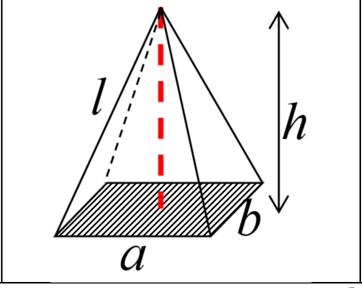
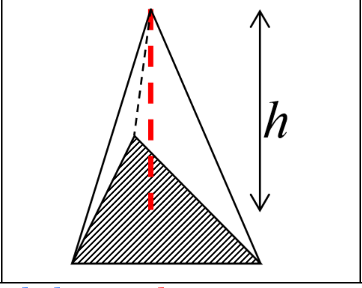
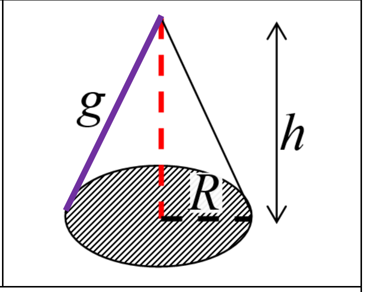


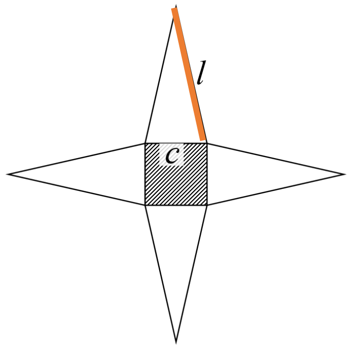


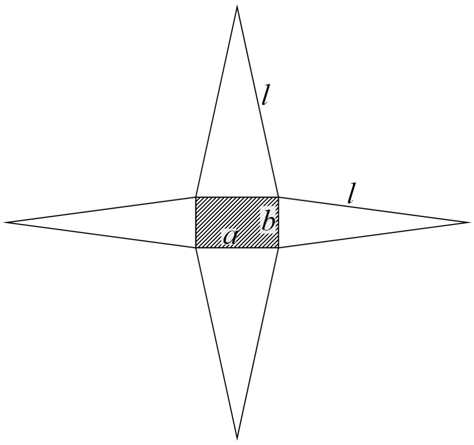


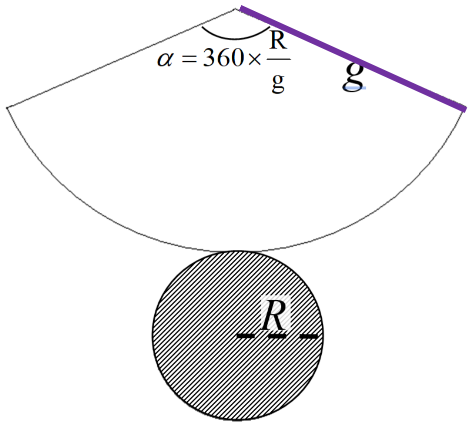


III – La famille des pyramides

Pyramide régulière	Pyramide	Tétraèdre	Cône
			
♥ $\textbf{Volume} = \dfrac{\textbf{Aire de la base} \times \textbf{hauteur}}{3}$			
$\mathbf{V} = \dfrac{c^2 \times h}{3}$	$\mathbf{V} = \dfrac{a \times b \times h}{3}$	$\mathbf{V} = \dfrac{aire\ triangle \times h}{3}$	$\mathbf{V} = \dfrac{\pi \times R^2 \times h}{3}$



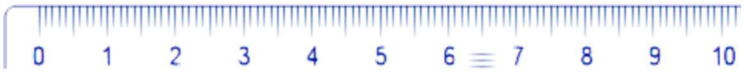




IV – Conversions

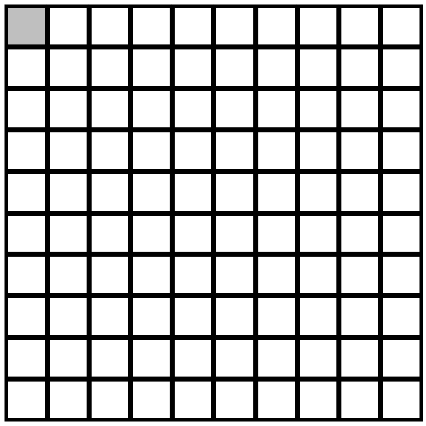
Longueurs

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
					1	0



Aires

km^2		hm^2		dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2	
			ha		a		ca						
							1	0	0				
					3	5	0 ,						
		7	0										

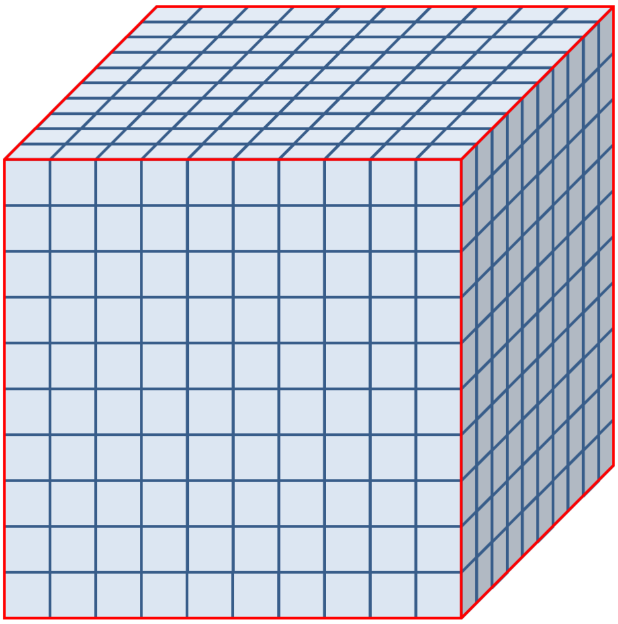


1 ha se lit « un hectare »
1 a se lit « un are »
1 ca se lit « un centiare »

Volumes

		km^3			hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			mm^3
												hL	daL	L	dL	cL	mL			
											1	0	0	0						
													1	5,	3	4				
														2,	4	5	4			

1 dm^3 = 1L



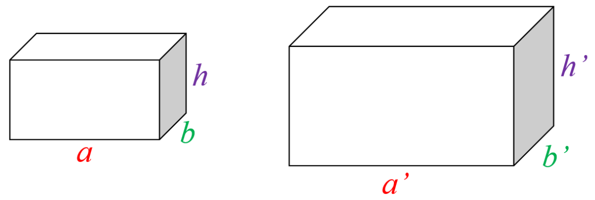
V – Agrandissements / réductions

Propriété admise

Si une figure est un agrandissement (ou une réduction) d'une autre figure de rapport k :

- les distances sont multipliées par k,
- les aires sont multipliées par k^2,
- les volumes sont multipliés par k^3.

Démonstration dans le cas des pavés droits.



Si le pavé de droite est un agrandissement du pavé gauche de coefficient *k*, alors on a :

$a' = k \times a$, $b' = k \times b$, et $h' = k \times h$.

Le volume du pavé de gauche est $V = a \times b \times h$

Le volume du pavé de droite est $V' = a' \times b' \times h'$

$V' = a' \times b' \times h' = k \times a \times k \times b \times k \times h = k^3 \times a \times b \times h = k^3 \times V$

Comment calculer le coefficient d'agrandissement-réduction ?

1. On repère une distance connue sur les 2 solides.
2. On calcule le coefficient par la formule :

$$\mathbf{k} = \frac{\textit{distance sur le solide d'arrivée}}{\textit{distance correspondante sur le solide de départ}}$$

Pour trouver le coefficient d'agrandissement-réduction, on repère une longueur connue sur le solide de départ et sur le solide d'arrivée.

<u>**Exemple**</u> 1

On donne une pyramide régulière de base ABCD et de sommet S.

On donne AB = 12 cm et OS = 21cm.

1°) Calculer le volume de SABCD.

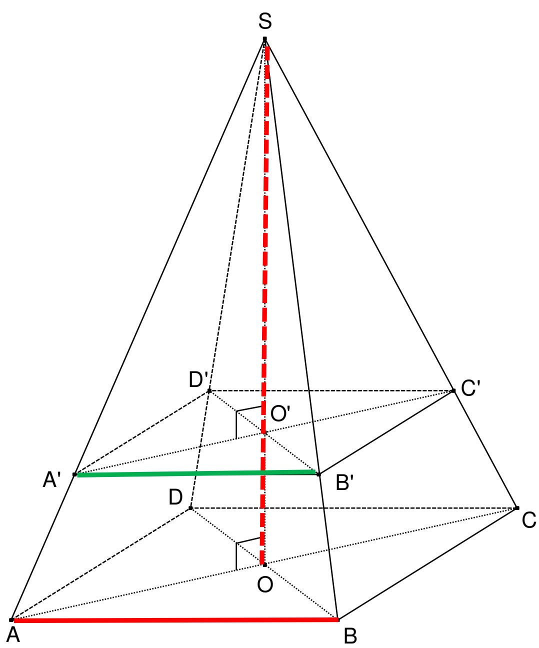
2°) On coupe cette pyramide par un plan parallèle à la base ABCD.

On obtient une réduction SA'B'C'D'.

On donne A'B' = 9 cm.

Calculer le rapport de réduction.

En déduire le volume de SA'B'C'D'.



1°) Soit V le volume de SABCD.

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{AB \times BC \times SO}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{12 \times 12 \times 21}}{\mathbf{3}} = \mathbf{1008}$$

Le volume de la pyramide SABCD est $\boxed{1008 \text{ cm}^3}$.

2°) Soit k le coefficient de réduction de SABCD vers SA'B'C'D'.

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{A'B'}}{\mathbf{AB}} = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{12}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} = \mathbf{0,75}$$

Soit V' le volume de SA'B'C'D'.

$$\mathbf{V' = k^3 \times V} = \left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\right)^{\mathbf{3}} \times \mathbf{1008 = 425,25}$$

Le volume de SA'B'C'D' est $\boxed{425,25 \text{ cm}^3}$.

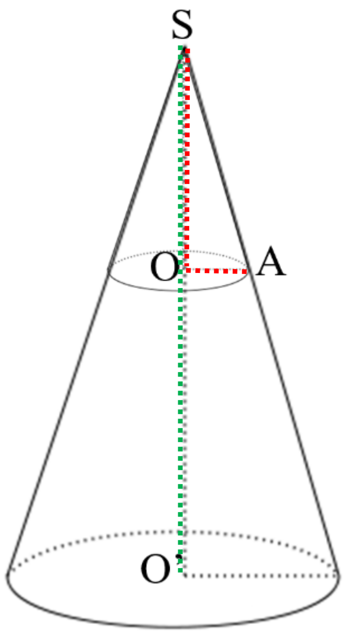
Exemple 2

Sur la figure suivante, on donne les informations suivantes :

- *SO = 6 cm*
- *AO = 5 cm*
- *SO' = 15 cm.*

Calculer le volume du grand cône.

On donnera le volume en litre, arrondi au millilitre près.



Soit V le volume du petit cône.

$$\mathbf{V} = \frac{\pi \times \mathbf{R^2} \times \mathbf{h}}{\mathbf{3}} = \frac{\pi \times \mathbf{OA^2} \times \mathbf{OS}}{\mathbf{3}} = \frac{\pi \times \mathbf{5^2} \times \mathbf{6}}{\mathbf{3}} = \mathbf{50\pi\ cm^3}$$

Soit k le coefficient d'agrandissement du petit vers le grand cône.

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{SO'}}{\mathbf{SO}} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{6}} = \mathbf{2,5}$$

Soit V' le volume du grand cône.

$$\mathbf{V'} = \mathbf{k^3} \times \mathbf{V} = \mathbf{2,5^3} \times \mathbf{50\pi} = \mathbf{781,25\pi}$$

Le volume du grand cône est $\boxed{781{,}25\pi} \approx 2454\ cm^3 = \boxed{2{,}454\ L}$.

VI – Repérage

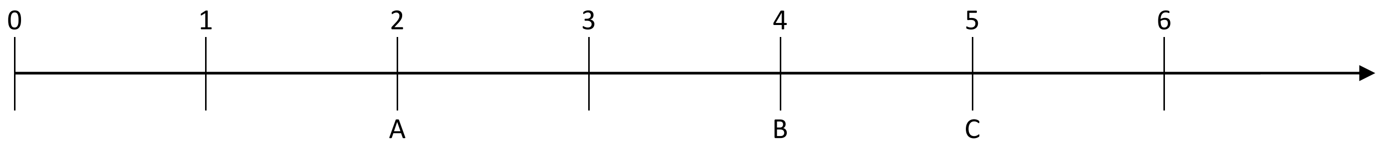
Avec 1 dimension

Pour se repérer, on a besoin de 2 points :

- l'origine (souvent le point O)
- l'unité (souvent le point I, ou le nombre 1).

On appelle *droite graduée*, une droite sur laquelle on a placé une origine et une unité.

Pour graduer la droite, il faut reporter l'unité.



Au lieu de parler de droite graduée, on pourra aussi parler d'axe gradué.

Lorsque l'on place un point sur une droite graduée, le nombre correspondant à ce point est appelé l'affixe de ce nombre.

Certaines fois on emploiera le mot abscisse.

L'affixe de A est 2 ; on notera A(2).
L'abscisse de B est 4.
Le nombre 4 est l'affixe du point B.
Le point C a pour affixe 5.

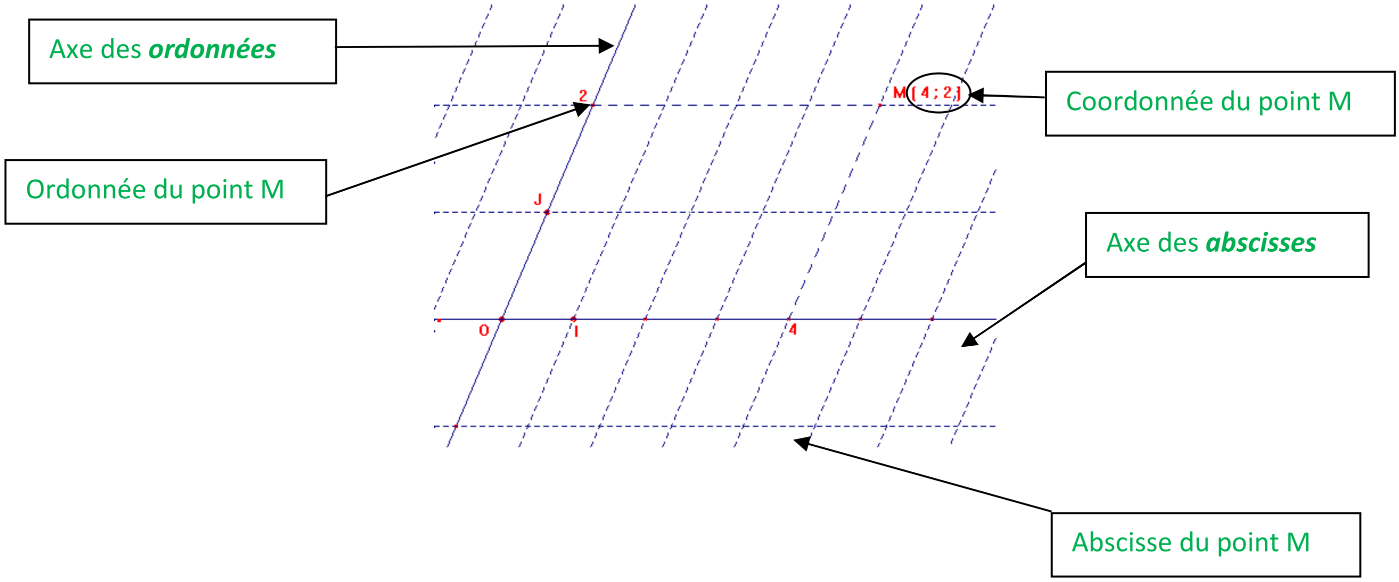
Avec 2 dimensions

Pour définir un repère, il faut donner 3 points non alignés :

- un point qui donne l'origine du repère
- un point qui donne l'unité sur l'axe des abscisses
- un point qui donne l'unité sur l'axe des ordonnées.

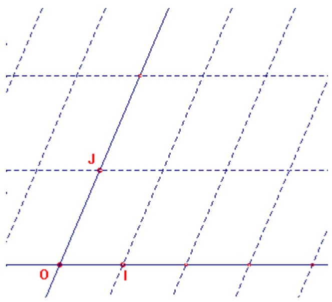
Le repère (O ; I ; J) est un repère pour lequel :

- est l'origine du repère
- I donne l'unité sur l'axe des abscisses
- J donne l'unité sur l'axe des ordonnées.



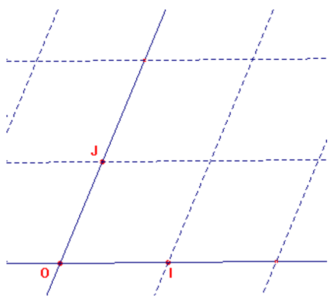
Le repère (O ; I ; J) est dit *quelconque* si

- ses axes ne sont pas perpendiculaires
- les unités ne sont pas les mêmes sur les deux axes.



Le repère (O ; I ; J) est dit *normé* ou *normal* si :

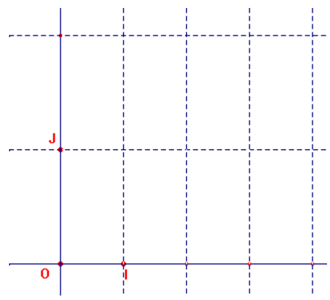
- OI = OJ



Même unité sur les deux axes.

Le repère (O ; I ; J) est dit *orthogonal* si :

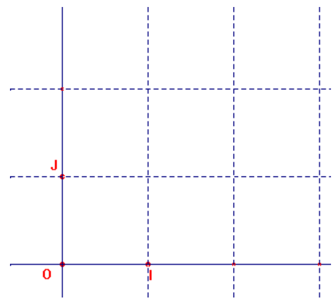
- (OI) ⊥ (OJ)



Axes perpendiculaires.

Le repère (O ; I ; J) est dit *orthonormé* ou *orthonormal* si :

- OI = OJ
- (OI) ⊥ (OJ)



Axes perpendiculaires
Même unité sur les deux axes.

Avec 3 dimensions

Pour définir un repère, il faut donner 4 points non alignés :

- un point qui donne l'origine du repère
- un point qui donne l'unité sur l'axe des abscisses
- un point qui donne l'unité sur l'axe des ordonnées.
- un point sur l’axe des hauteurs.

Le repère (O ; I ; J ; K) est un repère pour lequel :

- est l'origine du repère
- I donne l'unité sur l'axe des abscisses
- J donne l'unité sur l'axe des ordonnées
- K donne l’unité sur l’axe des hauteurs.

Pour se repérer dans l’espace, on « projette » le point sur le plan « horizontal ».

On commence par donner les coordonnées de ce point sur le plan en traçant les parallèles aux axes du plan de base ; ici on obtient 1 et 2 ; les cordonnées de ce point sont (1 ; 2).

On relie de point à l’origine du repère puis on trace la parallèle qui passe par A ; cette parallèle coupe l’axe des hauteurs qui indique alors la hauteur du point ; ici c’est 3.

Le point A a pour coordonnées : A(1 ; 2 ; 3).