PROPORTIONNALITE, VITESSES et ECHELLES

I – Proportionnalité

Définition

Deux séries de valeurs sont dites *proportionnelles* si pour passer de l'une à l'autre on multiplie toujours par un même nombre appelé le *coefficient de proportionnalité*.

Exemple

Volume de sans plomb 95 (E10) en litres	15	23	12
Prix en €	22,80	34,96	18,24

$\downarrow \times 1,52$

Propriété admise

$$a \times \frac{b}{a} = b$$

Pour passer du nombre a au nombre b, on multiplie par $\frac{b}{a}$.

$$a \xrightarrow{\times \frac{b}{a}} b \qquad \text{départ} \xrightarrow{\times \frac{\text{arrivée}}{\text{départ}}} \text{arrivée}$$

Exemples

$$5 \xrightarrow{\times 3} 15 \qquad 5 \xrightarrow{\times 13} 65 \qquad 5 \xrightarrow{\times \frac{645}{5} \text{ ou } \times 129} 645 \qquad 5 \xrightarrow{\times \frac{7}{5}} 7 \qquad 7 \xrightarrow{\times \frac{3}{7}} 3$$

Comment déterminer si un tableau correspond à une situation de proportionnalité ?

1°) On calcule, séparément, les quotients qui permettent de passer d'une valeur à la valeur correspondante.

2°) Si les quotients sont tous égaux, c'est une situation de proportionnalité.
Sinon, cela ne l'est pas.

Exemple 1

Masse de fraises en kg	3	5	7
Prix en €	5,10	8,50	11,90

Pour passer de 3 à 5,1 on multiplie par $\frac{5,1}{3} = 1,7$

Pour passer de 5 à 8,5 on multiplie par $\frac{8,5}{5} = 1,7$

Pour passer de 7 à 11,9 on multiplie par $\frac{11,9}{7} = 1,7$

C'est bien une situation de proportionnalité de coefficient 1,7.

Exemple 2

Masse de poires en kg	3	5	7
Prix en €	4,80	8,00	11,00

$\frac{4,80}{3} = 1,6 \qquad \frac{8,00}{5} = 1,6 \qquad \frac{11,00}{7} \approx 1,57$

Ce n'est pas une situation de proportionnalité.

Exemple 3

9	15	18
12	20	24

$\frac{12}{9} = \frac{4}{3} \qquad \frac{20}{15} = \frac{4}{3} \qquad \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$

C'est une situation de proportionnalité.

Propriété des produits en croix - admise

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $a \times d = b \times c$

Si $a \times d = b \times c$ alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Exemple 1

On veut comparer les fractions $\frac{65}{91}$ et $\frac{115}{161}$

On calcule séparément les produits en croix :

65×161 = 10 465

et 91×115 = 10 465

donc 65×161 = 91×115 donc $\frac{65}{91} = \frac{115}{161}$

Exemple 2

On veut comparer les fractions $\frac{7}{13}$ et $\frac{9}{17}$

On calcule séparément les produits en croix :

7×17 = 119

et 13×9 = 117

donc 7×17 ≠ 13×9 donc $\frac{7}{13} \neq \frac{9}{17}$

Exemple 3

Trouve le nombre manquant $\frac{5}{4} = \frac{7}{?}$

Les fractions sont égales donc les produits en croix sont égaux

5 × ? = 4 × 7 *On effectue les produits en croix*

5 × ? = 28 *On simplifie chaque membre*

? = 5,6 *On divise par 5*

Astuce

S'il n'y a qu'une valeur inconnue, on multiplie les deux quantités qui « touchent » celle qu'on cherche puis on divise le résultat par la quantité qui est « en face ».

Exemple 4

$\frac{5}{4} = \frac{7}{a}$ $\quad a = \frac{4 \times 7}{5} = 5{,}6$

$\frac{5}{4} = \frac{b}{3}$ $\quad b = \frac{3 \times 5}{4} = 3{,}75$

$\frac{c}{4} = \frac{7}{2}$ $\quad c = \frac{4 \times 7}{2} = 14$

$\frac{5}{d} = \frac{7}{3}$ $\quad d = \frac{5 \times 3}{7} = \frac{15}{7}$

Exemple 5

Trouve le nombre manquant $\frac{6}{4} = \frac{5+a}{a}$

Les fractions sont égales donc les produits en croix sont égaux

6 × *a* = 4 × (5 + *a*) *On effectue les produits en croix*

6*a* = 20 + 4*a* *On simplifie chaque membre*

-4*a* -4*a*

2*a* = 20 *On isole les inconnues dans un membre*

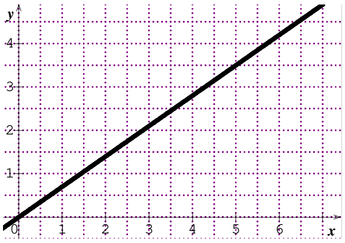
a = 10 *On divise les deux membres par 2*

Propriété – admise

La représentation graphique d'une situation de proportionnalité est

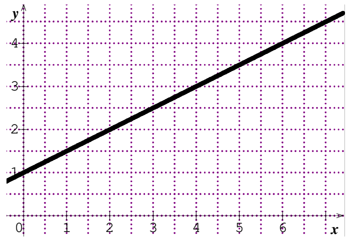
- une droite
- qui passe par l'origine du repère

Exemples

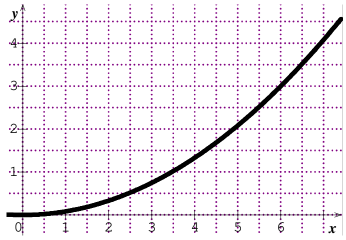


Une droite qui passe par l'origine

Situation de proportionnalité



Une droite qui ne passe pas par l'origine



Pas une droite

Pas une situation de proportionnalité

II – Vitesse, distance et temps

3,4h ≠ 3h 40 min

3,4 h = 3h + 0,40h = 3h 24min

× 60

3h 18min ≠ 3,18h

3h 18 min = 3h + 0,30h = 3,3h

÷ 60

Conversion avec la calculatrice

CASIO FX92	Texas Instruments
3,15 [EXE] [°,,,]	3,15 [2nde] [π] [→DMS] [entrer]

3,15 h = 3h 9min

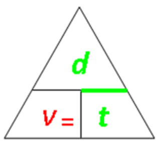
CASIO FX92	Texas Instruments
3 [°,,,] 12 [°,,,] [EXE] [°,,,]	3 [2nde] [π] [°] 12 [2nde] [π] ['] [entrer]

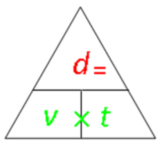
3h 12min = 3,2h

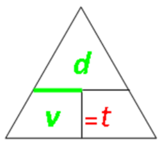
Propriétés admises

Si *d* est la distance, *t* le temps et *v* la vitesse moyenne on a alors

$v = \frac{d}{t}$ $\quad$ $d = v \times t$ $\quad$ $t = \frac{d}{v}$







Exemple 1 : recherche de la vitesse moyenne

Clément roule pendant 3h et parcourt 183km. Quelle est sa vitesse moyenne ?

Calculons sa vitesse moyenne

Méthode 1

$$v = \frac{d}{t} = \frac{183}{3} = 61$$

Méthode 2

Distance	Temps
183 km	3h
?	1h

↓ ÷3

$$? = \frac{183 \times 1}{3} = 61$$

Sa vitesse moyenne est de $\boxed{\text{61 km/h}}$.

Remarque

Deux nombres a et b sont dans le *ratio* 2 : 3 si $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$ | Trois nombres a, b, c sont dans le *ratio* 2 : 3 : 7 si $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{7}$

Exemple

$\frac{2}{3} = \frac{10}{15} = \frac{8}{12}$ donc 2, 10 et 8 sont dans le ratio 3 : 15 : 12

$\frac{10}{12} = \frac{5}{6} = \frac{15}{18}$ donc 10, 5 et 15 sont dans le ratio 12 : 6 : 18

Exemple 2 : recherche de la distance parcourue

Mathieu roule pendant 3h à 43 km/h de moyenne. Quelle est la distance parcourue ?

Calculons la distance parcourue

Méthode 1

$d = v \times t = 43 \times 3 = 129$

Méthode 2

Distance	Temps
43 km	1h
?	3h

↓ ×3

$? = \frac{43 \times 3}{1} = 129$

La distance parcourue est $\boxed{129 \text{ km}}$.

Exemple 3 : recherche du temps de parcours

Pauline marche pendant 12km à la vitesse moyenne de 4,5 km/h. Quel est le temps de parcours ?

Calculons le temps de parcours

Méthode 1

$t = \frac{d}{v} = \frac{12}{4{,}5} = \frac{8}{3}$

Méthode 2

Distance	Temps
4,5 km	1h
12 km	?

→ ÷ 4,5

$? = 12 \div 4{,}5 = \frac{8}{3}$

Le temps de parcours est de $\frac{8}{3}$h = $\boxed{\text{2h 40min}}$.

Exemple 4 : conversions de vitesse

Convertir 135 km/h en m/s

Distance	Temps
135 km = 135 000 m	1 h = 3 600 s
?	1 s

↓ ÷ 3 600

? = 135 000 ÷ 3 600 = 37,5

135 km/h = 37,5 m/s

Convertir 15 m/s en km/h

Distance	Temps
15 m	1 s
? m = ? km	3 600 s = 1h

↓ × 3600

? = 15 × 3600 = 54 000 m = 54 km

15 m/s = 54 km/h

III – Echelles

Remarque

Pour représenter la réalité, il peut être nécessaire de l'agrandir ou de la réduire.
S'il s'agit d'un agrandissement, on multiplie les distances par un nombre supérieur à 1.
S'il s'agit d'une réduction, on multiplie les distances par un nombre entre 0 et 1.

Réduction

En bas à gauche, il est indiqué que l'échelle est de 1 : 10 000 ; on devrait écrire $\frac{1}{10\,000}$.

Cela signifie que pour passer de la réalité à la carte, on a multiplié les distances par $\frac{1}{10\,000}$.

Par exemple, si on cherche les points à 350 m de l'entrée du collège, on doit chercher la distance correspondante sur la carte, on calcule :

$$350 \times \frac{1}{10\,000} = 0{,}0350$$

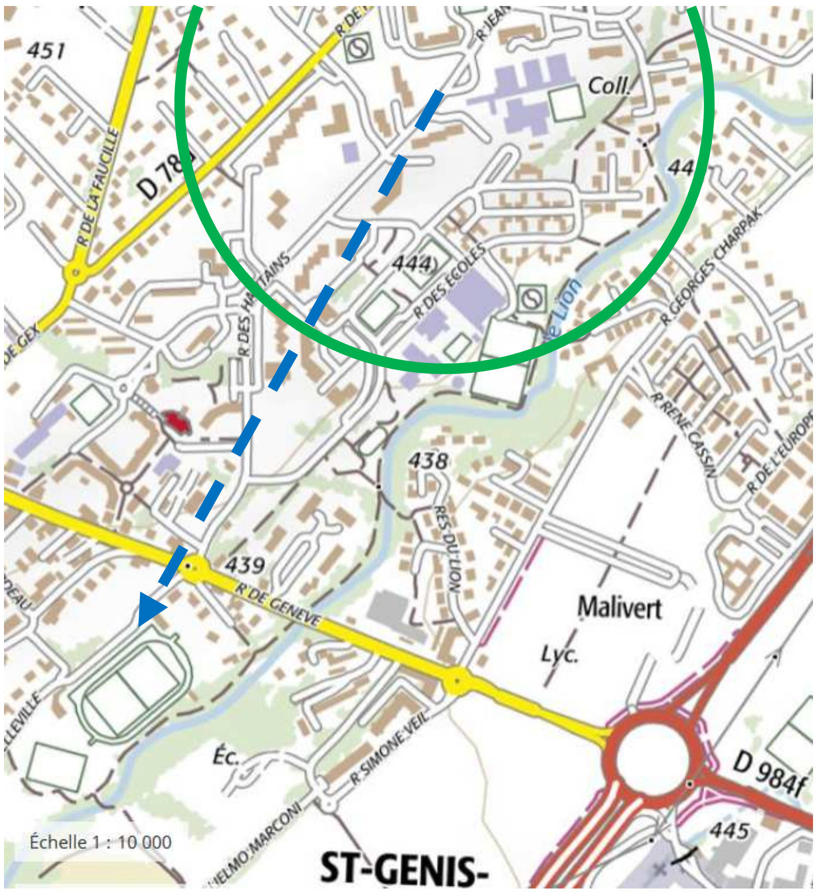
Sur la carte, cela correspond à 0,035 m = 3,5 cm
Ce sont donc tous les points sur le cercle vert.

L'échelle $\frac{1}{10\,000}$ signifie aussi que 1 cm sur la carte représente 10 00 cm = 100 m de la réalité.
On aurait aussi pu la trouver avec un tableau de proportionnalité en utilisant 350 m = 35 000 cm

Carte	Réalité
1 cm	10 000 cm
?	35 000 cm

$$? = \frac{1 \times 35\,000}{10\,000} = 3{,}5$$

On retrouve le rayon de 3,5 cm.



www.geoportail.fr

Pour aller de l'entrée du collège au stade, il y a 8 cm (la flèche bleue pointillée). On peut déterminer la distance entre le collège et le stade :

Carte	Réalité
1 cm	10 000 cm
8 cm	?

$$? = \frac{8 \times 10\,000}{1} = 80\,000$$

Il y a 80 000 cm = 800 m pour aller du collège au stade.

Agrandissement

L'échelle est ici de $\frac{20}{1}$. Cela signifie que pour passer de la réalité à la photo, on a multiplié les distances par $\frac{20}{1}$.
Cela signifie aussi que 20 cm sur la photo représentent 1 cm dans la réalité.

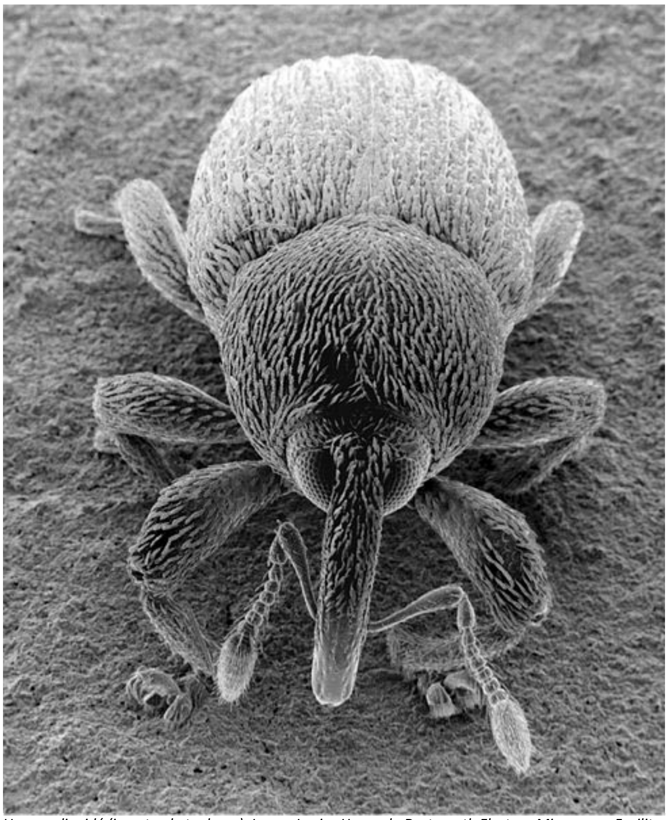
Pour connaître sa taille réelle, on la mesure sur la photo ; on trouve ici 8,6 cm.

Je calcule sa taille réelle :

Photo	Réalité
20 cm	1 cm
8,6 cm	?

$$? = \frac{8{,}6 \times 1}{20} = 0{,}43$$

La taille est donc de 0,43 cm = 4,3 mm.



Un curculionidé (insecte phytophage). Image Louisa Howard - Dartmouth Electron Microscope Facility.