I – L'utilisation de lettres dans les calculs

Histoire

Le calcul littéral (calcul avec des lettres) appelé aussi calcul algébrique, du mot algèbre, est un puissant outil développé par le mathématicien français François Viète (1540 – 1603) qui a attribué une lettre à des quantités inconnues dans des calculs, mais aussi à des coefficients.

L'aire d'un carré est A = $c \times c$; le périmètre d'un cercle est $P = \pi \times d$.

L'usage de la lettre X remonte à René Descartes. Mais l'idée de donner un nom à l'inconnue d'un problème est plus ancienne encore, puisqu'elle vient du mathématicien grec Diophante IIIe siècle, qui l'appelait « arithmos », le nombre. Plus tard, le mathématicien perse Al-Kwarizmi IXe siècle la nomma « shay », la chose en arabe. Ce mot est plus connu en français populaire dans sa forme plurielle chouïa, "un chouïa" signifiant "un peu".

Cette pratique parvint en France grâce aux Espagnols, qui transcrivaient ce mot en « xay ». Descartes simplifia en ne gardant que l'initiale, d'où « X ». Son usage s'étendit ensuite, en particulier au monde judiciaire.

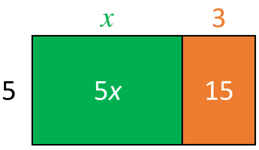
Al-Khwarizmin (latinisé en Algoritmi ou Algorizmi), né dans les années 780, probablement à Khiva dans la région du Khwarezm (d'où il prend son nom), dans l'actuel Ouzbékistann, mort vers 850 à Bagdad, est un mathématicien, géographe, astrologue et astronome perse, membre de la Maison de la sagesse de Bagdad. Ses écrits, rédigés en langue arabe, puis traduits en latin à partir du XIIe siècle, ont permis l'introduction de l'algèbre en Europe. Sa vie s'est déroulée en totalité à l'époque de la dynastie abbasside.

Son nom latinisé est à l'origine du mot algorithme et le titre de l'un de ses ouvrages (Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison) est à l'origine du mot algèbre. L'utilisation des chiffres arabes et leur diffusion dans le Moyen-Orient et en Europe sont dues à un autre de ses livres nommé Traité du système de numération des Indiens qui fut diffusé via la langue arabe dans tout l'empire abbasside. Al-Khawarizmi a classifié les algorithmes existants, en particulier selon leurs critères de terminaison, mais ne revendique pas leur invention : l'algorithme le plus connu du monde est celui d'Euclide et les premiers algorithmes connus le furent, sans surprise, dans un pays devant gérer des calculs élaborés de l'impôt : à Babylone.

⚠ Attention

Il faut prêter une attention toute particulière à la graphie de la lettre x pour ne pas la confondre avec le signe de multiplication ×.

Remarque calcul de $5 \times (x + 3)$

Géométrique	" Répétitif "	Avec la simple distributivité
 $5 \times (x + 3) = 5x + 15$	$5 \times (x + 3) = x + 3$ $+ x + 3$ $+ x + 3$ $+ x + 3$ $+ x + 3$ $= 5 \times x + 5 \times 3$ $= 5x + 15$	$5 \times (x + 3) = 5 \times x + 5 \times 3 = 5x + 15$

Propriété simple distributivité - admise

$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$

Exemples de distribution

$5 \times (2x + 7) = 10x + 35$ $\quad$ $8 \times (x - 3) = 8x - 24$ $\quad$ $-6 \times (x + 7) = -6x - 42$ $\quad$ $-4 \times (x - 7) = -4x + 28$

Remarque sur la réduction des produits

On peut toujours réduire les produits.

$2x \times 3x = 6x^2$ $\quad$ $-5 \times 3x = -15x$ $\quad$ $3x \times 7y = 21xy$

Remarque sur la réduction de sommes

$3x + 2x = 5x$ $\quad$ $15x - 8x = 7x$ $\quad$ $4x - 12x = -8x$ $\quad$ $15x^2 - 8x^2 = 7x^2$ $\quad$ $33x - 5x^2 + 7x + 11x^2 = 40x + 6x^2$

$5x^2 + 3x$ ne peut pas se réduire

Remarque

Dans tous les exercices, il faudra réduire les expressions (*même si cela n'est pas indiqué dans l'énoncé*).

Remarque gestion du signe « - »

$-(2x + 7) = -2x - 7$ $\quad$ $-(x - 3) = -x + 3$ $\quad$ $-(-3x + 7) = +3x - 7$ $\quad$ $-(-6x - 7) = +6x + 42$

Exemples complexes

$3\,(x + 5) + 7\,(x + 4) = 3x + 15 + 7x + 28 = 10x + 43$

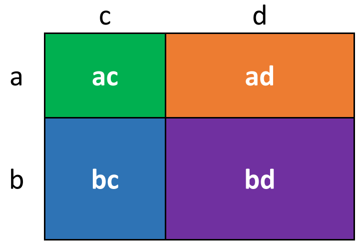
$5\,(x + 7) + 8\,(x - 3) = 5x + 35 + 8x - 24 = 13x + 11$

$6\,(x - 4) - 9\,(x + 2) = 6x - 24 - 9x - 18 = -3x - 42$

$6\,(x - 7) + 9x\,(3x - 2) = 6x - 42 + 27x^2 - 18x = 27x^2 - 12x - 42$

Propriété double distributivité

$(a + b)\,(c + d) = ac + ad + bc + bd$



Démonstration

$(a + b)\,(c + d) = (a + b) \times c + (a + b) \times d = ac + ad + bc + bd$

Exemples

$(x + 3)\,(x + 7) = x^2 + 7x + 3x + 21 = x^2 + 10x + 21$

$(x + 2)\,(x + 3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$

$(x + 5)\,(x - 4) = x^2 - 4x + 5x - 20 = x^2 + x - 20$

$(x - 8)\,(x + 3) = x^2 + 3x - 8x - 24 = x^2 - 5x - 24$

$(x - 4)\,(x - 6) = x^2 - 6x - 4x + 24 = x^2 - 10x + 24$

$(2x + 3)\,(3x + 7) = 6x^2 + 14x + 9x + 21 = 6x^2 + 23x + 21$

Exemples complexes

$(x + 5)\,(x + 4) + (x + 2)\,(x + 9) = x^2 + 4x + 5x + 20 + x^2 + 9x + 2x + 18 = 2x^2 + 20x + 38$

$(x + 5)\,(x - 4) + (x - 2)\,(x - 9) = x^2 - 4x + 5x - 20 + x^2 - 9x - 2x + 18 = 2x^2 - 10x - 2$

$(x + 3)\,(x - 2) + 5\,(x - 6)\,(x + 7) = x^2 - 2x + 3x - 6 + 5 \times (x^2 + 7x - 6x - 42) = x^2 + x - 6 + 5x^2 + 35x - 42x - 210$
$= 6x^2 - 6x - 216$

$(x - 2)\,(x - 3) - (x - 5)\,(x + 4) = x^2 - 3x - 2x + 6 - (x^2 + 4x - 5x - 20) = x^2 - 3x - 2x + 6 - x^2 - 4x + 5x + 20 = -4x + 26$

$(2x + 7)\,(3x - 4) - 8\,(x + 2)\,(x - 5) = 6x^2 - 8x + 21x - 28 - 8 \times (x^2 - 5x + 2x - 10) = 6x^2 - 8x + 21x - 28 - 8x^2 + 40x - 16x + 80$
$= -2x^2 + 37x + 52$

II – Equations

Histoire

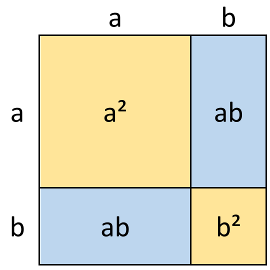
Dans l'Antiquité, vers -2000 avant JC, les Babyloniens savaient déjà résoudre des problèmes par équations, mais leur résolution n'a rien à voir avec les techniques actuelles. On le sait grâce à un célèbre document conservé au British Muséum à Londres, le Papyrus Rhind, qui date de -1650.

Le Papyrus Rhind a été écrit par un scribe égyptien nommé Ahmès. Son nom vient de l'Écossais Henry Rhind qui l'acheta en 1858 à Louxor. Il aurait été découvert sur le site de la ville de Thèbes, en Egypte Actuellement conservé au British Museum (Londres), il contient 87 problèmes résolus d'arithmétique, d'algèbre, de géométrie et d'arpentage, sur plus de 5 m de longueur et 32 cm de large. Ahmès indique que son papyrus est, en partie, une copie de résultats plus anciens (vers -2000) remontant aux Babyloniens.

« J'ai une pierre mais je ne l'ai pas pesée. Après avoir enlevé un septième de son poids, j'ai pesé le tout et j'ai trouvé 1 ma-na (unité de masse). Quel était le poids de la pierre à l'origine ? ».

Définition

$$\overbrace{\underbrace{5x + 5}_{\text{Membre de gauche}} = \underbrace{3x - 17}_{\text{Membre de droite}}}^{\text{Une équation}}$$



Remarque

Lorsque l'on a une équation, le signe d'égalité ne signifie pas que les deux membres sont identiques et sont deux écritures différentes d'une même expression algébrique.

Le signe d'égalité signifie que pour certaines valeurs numériques données aux inconnues, les deux membres seront égaux.

Définition

On dit qu'un nombre est *une solution* d'une équation l'égalité entre les deux membres est vraie lorsqu'on remplace l'inconnue par ce nombre.

Exemples

Pour l'équation $5x + 5 = 3x - 17$, tester si 2 et -11 sont des solutions.

Méthode « littéraire »	Méthode en ligne	Méthode en colonne
Lorsque $x = 2$ alors • le membre de gauche devient $5 \times 2 + 5 = 15$ • et le membre de droite devient $3 \times 2 - 17 = -11$ Donc **2 n'est pas une solution**.	Si $x = 2$ alors $5x + 5 = 5 \times 2 + 5 = 15$ et $3x - 17 = 3 \times 2 - 17 = -11$ Donc **2 n'est pas une solution**.	Si $x = 2$ alors $5x + 5$ | $3x - 17$ $= 5 \times 2 + 5$ | $= 3 \times 2 - 17$ $= 15$ | $= -11$ Donc **2 n'est pas une solution**.

Méthode « littéraire »	Méthode en ligne	Méthode en colonne
Lorsque $x = -11$ alors • le membre de gauche devient $5 \times (-11) + 5 = -50$ • et le membre de droite devient $3 \times (-11) - 17 = -50$ Donc **-11 est une solution**.	Si $x = -11$ alors $5x + 5 = 5 \times (-11) + 5 = -50$ et $3x - 17 = 3 \times (-11) - 17 = -50$ Donc **-11 est une solution**.	Si $x = -11$ alors $5x + 5$ | $3x - 17$ $= 5 \times (-11) + 5$ | $= 3 \times (-11) - 17$ $= -50$ | $= -50$ Donc **-11 est une solution**.

Définition

Résoudre une équation c'est trouver toutes les solutions.

Exemples

Equation n'ayant pas de solution	Equation ayant une seule solution	Equation ayant une infinité de solution
$2x + 3 = 2x + 5$	$5x + 5 = 3x - 17$	$2(x + 5) - 2 = 2x + 8$
On ne peut pas trouver de valeur numérique pour laquelle l'égalité serait vraie. On peut tester tous les nombres, il n'y a pas de solution.	La solution de cette équation est –11.	On peut tester toutes les autres valeurs, l'égalité ne serait pas vraie. Quelle que soit la valeur numérique par laquelle on remplace *x*, l'égalité sera vraie.

Remarque

Dans les exercices de collège, (presque toutes) les équations auront une solution unique.

Propriété - admise

On ne change pas les solutions d'une équation si :

1. On additionne (ou soustrait), une même expression aux deux membres de l'équation.
2. On multiplie (ou divise) les deux membres de l'équation par une même expression NON NULLE.

Exemples d'application de la propriété

$x + 5 = 8$ $-5 \quad -5$ On veut faire disparaître +5 ; il faut faire -5 dans les deux membres. $x = 3$ La solution est **3**.	$x + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ $-\frac{1}{3} \quad -\frac{1}{3}$ On veut faire disparaître $+\frac{1}{3}$; il faut faire $-\frac{1}{3}$ dans les deux membres. $x = \frac{1}{6}$ La solution est $\mathbf{\frac{1}{6}}$.
$x - 7 = 4$ $+7 \quad +7$ On veut faire disparaître -7 ; il faut faire +7 dans les deux membres. $x = 11$ La solution est **11**.	$x - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ $+\frac{1}{4} \quad +\frac{1}{4}$ On veut faire disparaître $-\frac{1}{4}$; il faut faire $+\frac{1}{4}$ dans les deux membres. $x = \frac{3}{4}$ La solution est $\mathbf{\frac{3}{4}}$.

$3x = 12$ ÷3 ÷3 On veut faire disparaître le 3 devant le x donc le ×3 devant le x ; il faut diviser les deux membres par 3. $x = 4$ La solution est **4**.	$-7x = 42$ ÷(-7) ÷(-7) On veut faire disparaître le -7 devant le x donc le ×(-7) devant le x ; il faut diviser les deux membres par -7. $x = -6$ La solution est **-6**.
$\frac{x}{5} = 2$ ×5 ×5 On veut faire disparaître la division par 5 ; il faut faire ×5 dans les deux membres. $x = 10$ La solution est **10**.	$\frac{x}{-3} = 7$ ×(-7) ×(-7) On veut faire disparaître la division par (-7) ; il faut faire ×(-7) dans les deux membres. $x = -21$ La solution est **-21.**

Exemple de résolution d'une équation

Résoudre l'équation $2(x + 5) = 6x + 7$.

$2(x + 5) = 6x + 7$	On réécrit l'équation
$2x + 10 = 6x + 7$	On simplifie l'écriture de chacun des membres en développant et réduisant
$-6x$ -10 $-6x$ -10 $-4x = -3$	On isole les inconnues dans un membre et les nombres dans l'autre en utilisant le point 1 de la propriété ci-dessus.
÷ (-4) ÷ (-4) $x = 0{,}75$	Pour trouver x, on divise par le nombre devant x en utilisant le point 2 de la propriété ci-dessus.
Si $x = 0{,}75$ alors $2(x + 5) = 2 \times (0{,}75 + 5) = 11{,}5$ $6x + 7 = 6 \times 0{,}75 + 7 = 11{,}5$	On teste si le nombre trouvé est bien une solution de l'équation en remplaçant dans l'équation du départ.
La solution de l'équation est $\boxed{0{,}75}$.	On conclue par une phrase.

En contrôle, il faut écrire tout ce qui est en noir ci-dessus.

III – Problèmes

Exemple 1

Dans la cour de la ferme, il n'y a que des poules et des lapins. J'ai compté 174 têtes et 400 pattes. Combien y a-t-il d'animaux de chaque sorte ?

<table>
<tr><td>Soit L le nombre de lapins.</td><td>Expliciter l'inconnue.
C'est souvent la question qui nous indique quelle inconnue choisir.</td></tr>
<tr><td><table><tr><td></td><td>Lapins</td><td>Poules</td><td>Total</td></tr><tr><td>Têtes</td><td>L</td><td>174 - L</td><td>174</td></tr><tr><td>Pattes</td><td>4 × L</td><td>2 × (174 – L)</td><td>400</td></tr></table>4 × L + 2 × (174 – L) = 400</td><td>Ecrire l'équation</td></tr>
<tr><td>4L + 348 – 2L = 400
2L + 348 = 400
- 348   - 348
2L = 52
÷ 2   ÷ 2
L = 26</td><td>Résoudre l'équation</td></tr>
<tr><td>Il y a 26 lapins et 174-26 = 148 poules.</td><td>Interpréter le résultat</td></tr>
<tr><td>Vérification :
Têtes : 26 + 148 = 174
Pattes : 4×26 + 2×148 = 400
C'est bon</td><td>Vérifier sur les données du problème</td></tr>
</table>

Exemple 2

Jules à 8 ans et son père a 42 ans.
Dans combien de temps l'âge du père sera-t-il le triple de celui de son fils ?

Soit x le nombre d'années à attendre.

	Jules	Père
Aujourd'hui	8	42
Dans x années	$8 + x$	$42 + x$

Père = 3 × Jules

$42 + x = 3 \times (8 + x)$

$42 + x = 24 + 3x$

$-24 \quad -x \quad -24 \quad -x$

$18 = 2x$

$\div 2 \quad \div 2$

$9 = x$

Il faut attendre **9 ans**.

Vérification : dans 9 ans
Jules : 8 + 9 = 17 ans
Père : 42 + 9 = 51 ans
3 × 17 = 51
C'est bon

Exemple 3

Un kilogramme de poire coûte un euro de plus qu'un kilogramme de pommes.
Marion a acheté trois kilos de pommes et cinq kilos de poires.
Elle a payé vingt-cinq euros.
Quel est le prix d'un kilo de pommes ? de poires ?

Soit x le prix d'un kilogramme de pommes.

	Pommes	Poires	Total
Quantité en kg	3	5	
Prix au kg	x	$x + 1$	
Prix à payer	$3 \times x$	$5 \times (x + 1)$	25

$3 \times x + 5 \times (x + 1) = 25$

$3x + 5x + 5 = 25$

$8x + 5 = 25$

$-5 \quad -5$

$8x = 20$

$\div 8 \quad \div 8$

$x = 2{,}5$

Les pommes coûtent **2,5 €** au kilo
et les poires coûtent 2,5 + 1 = **3,5 €** au kilo.

Vérification :
Pommes : 3 × 2,5 = 7,5
Poires : 5 × 5,5 = 17,5
Total : 7,5 + 17,5 = 25
C'est bon

Exemple 4

Marina et Karima pensent au même nombre.
Marina ajoute 8 et multiplie le résultat par 3.
Karima multiplie le résultat par 5 et ajoute 6.
Curieusement, elles trouvent le même résultat.
A quel nombre ont-elles pensé au départ ?

Soit x le nombre pensé au départ.

	Marina	Karima
Départ	x	x
Après calcul	$3 \times (x + 8)$	$5 \times x + 6$

$3 \times (x + 8) = 5 \times x + 6$

$3x + 24 = 5x + 6$

$-3x \quad -6 \quad -3x \quad -6$

$18 = 2x$

$\div 2 \quad \div 2$

$9 = x$

Elles ont pensé au nombre **9**.

Vérification :
Marina : 9 → 9 + 8 = 17 → 17 × 3 = 51
Karima : 9 → 9 × 5 = 45 → 45 + 6 = 51
C'est bon

Exemple 5

Kassandra et Arthur ont le même nombre de billes.
Si Arthur donne 10 billes à Kassandra, elle en aura alors deux fois pl
que lui.
Combien ont-ils de billes au départ ?

Soit x le nombre de billes au départ.

	Kassandra	Arthur
Départ	x	x
Après calcul	$x + 10$	$x - 10$

Kassandra = 2 × Arthur

$x + 10 = 2 \times (x - 10)$

$x + 10 = 2x - 20$

$30 = x$

Ils avaient chacun 30 billes.

Vérification :
Kassandra : 30 → 30 + 10 = 40
Arthur : 30 → 30 − 10 = 20
2 × 20 = 40
C'est bon