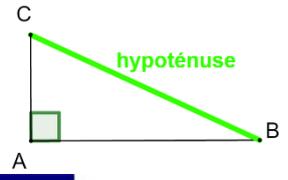


Triangles rectangles : PYTHAGORE et TRIGONOMETRIE

I - PYTHAGORE

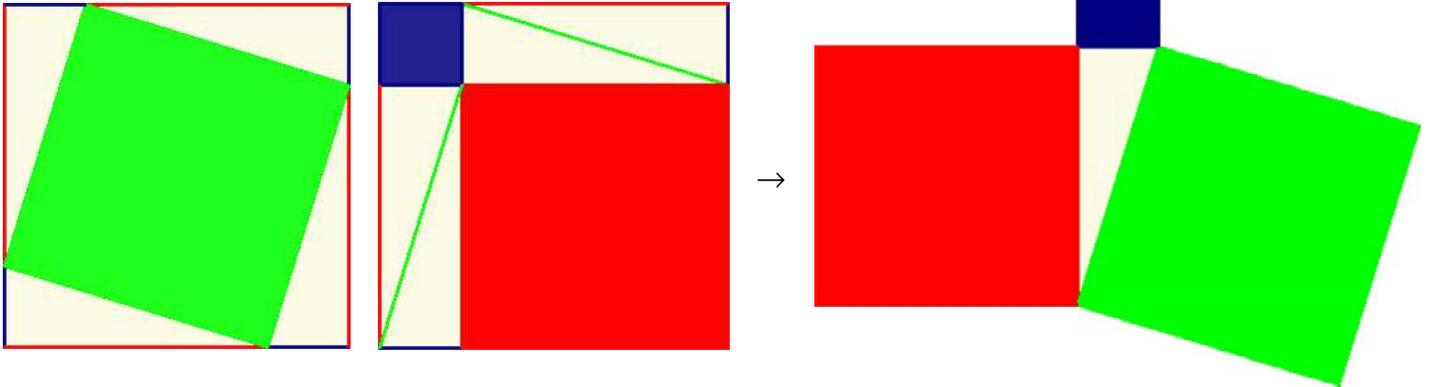
Définition

Dans un triangle, le côté opposé à l'angle droit est appelé l'*hypoténuse*.



Remarque

C'est le plus grand côté du triangle rectangle.



Théorème de Pythagore admis

- Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.
- Si ABC un triangle rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

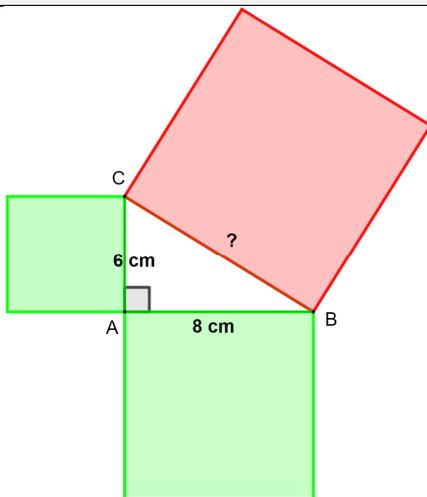
⚠ Cette propriété ne s'applique que dans les triangles rectangles.

Exemples

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que

- $AB = 6 \text{ cm}$
- $AC = 8 \text{ cm}$

Calcule BC.



Dans ABC rectangle en A,
d'après le théorème de Pythagore

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = 6^2 + 8^2$$

$$BC^2 = 36 + 64$$

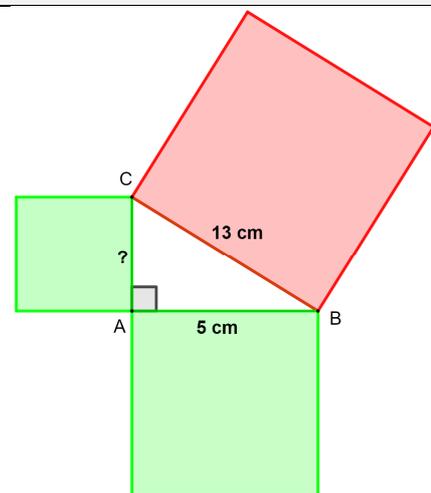
$$BC^2 = 100$$

$$BC = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$$

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que

- $AB = 5 \text{ cm}$
- $BC = 13 \text{ cm}$

Calcule AC.



Dans ABC rectangle en A,
d'après le théorème de Pythagore

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$13^2 = 5^2 + AC^2$$

$$169 = 25 + AC^2$$

$$- 25 \quad - 25$$

$$144 = AC^2$$

$$AC = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

Exemple avec valeur approchée

Soit ABC un triangle rectangle tel que $AB = 4 \text{ cm}$ et $AC = 5 \text{ cm}$.

Calcule BC.

Dans ABC rectangle en A,

d'après le théorème de Pythagore

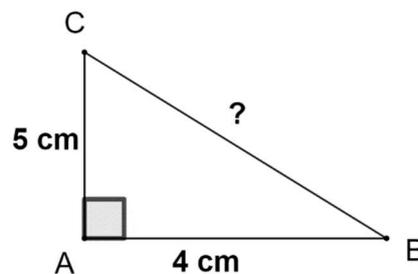
$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = 4^2 + 5^2$$

$$BC^2 = 16 + 25$$

$$BC^2 = 41$$

$$BC = \sqrt{41} \approx 6,4 \text{ cm}$$



Utilisation de la calculatrice

CASIO FX92	TI collègue
Pour calculer $6^2 + 8^2$, je tape	
6 $\square{x^2}$ + 8 $\square{x^2}$ \square{EXE}	6 $\square{x^2}$ + 8 $\square{x^2}$ =
CASIO FX92	TI collègue
Pour calculer $\sqrt{100}$, je tape	
$\square{SECONDE}$ $\square{x^2}$ 100 \square{EXE}	$\square{SECONDE}$ $\square{x^2}$ 100 =

Propriété réciproque de Pythagore admise

- Dans un triangle, si le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle est rectangle.
- Soit ABC un triangle.
Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors le triangle est rectangle et [BC] est l'hypoténuse, le triangle est rectangle en A.

Propriété contraposée de Pythagore admise

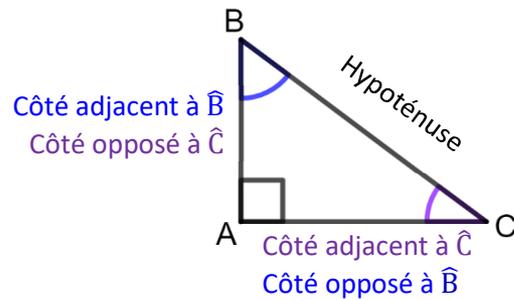
- Dans un triangle, si le carré du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle n'est pas rectangle.
- Soit ABC un triangle.
Si [BC] est le plus grand côté et $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ alors le triangle n'est pas rectangle.

Exemples

Prouver qu'un triangle est rectangle.	Prouver qu'un triangle n'est pas rectangle.
Soit ABC un triangle tel que $AB = 3 \text{ cm}$, $BC = 4 \text{ cm}$ et $AC = 5 \text{ cm}$.	Soit ABC un triangle tel que $AB = 5 \text{ cm}$, $BC = 7 \text{ cm}$ et $AC = 6 \text{ cm}$.
Quelle est la nature de ABC ?	Quelle est la nature de ABC ?
Si ABC était rectangle, l'hypoténuse serait [AC] car c'est le plus grand côté.	Si ABC était rectangle, l'hypoténuse serait [BC] car c'est le plus grand côté.
$\begin{array}{l l} AC^2 & AB^2 + BC^2 \\ = 5^2 & = 3^2 + 4^2 \\ = 25 & = 9 + 16 \\ & = 25 \end{array}$	$\begin{array}{l l} BC^2 & AB^2 + AC^2 \\ = 7^2 & = 5^2 + 6^2 \\ = 49 & = 25 + 36 \\ & = 61 \end{array}$
Donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc d'après la propriété réciproque de Pythagore, ABC est rectangle en B (car [AC] est l'hypoténuse).	Donc $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ d'après la contraposée de Pythagore alors ABC n'est pas rectangle .

II - TRIGONOMETRIE

Définitions



Préliminaire

Dans un triangle rectangle, les rapports suivants ne dépendent que de la mesure de l'angle et non de celles des côtés :

- Côté adjacent à l'angle aigu sur l'hypoténuse
- Côté opposé à l'angle aigu sur l'hypoténuse
- Côté opposé sur côté adjacent du même angle aigu.

On les appelle respectivement cosinus, sinus et tangente de l'angle aigu.

Démonstration

Comme (A'C') et (AC) sont perpendiculaires à (AB) alors (AC)//(A'C').

Comme (AC)//(A'C') et comme B, A', A et B, C', C sont alignés, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{BA'}{BA} = \frac{BC'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

$$BA' \times BC = BC' \times BA$$

$$\div BC' \quad \div BC \quad \div BC' \quad \div BC$$

$$\text{donc } \frac{BA'}{BC'} = \frac{BA}{BC} = \text{cosinus de l'angle } \hat{B}$$

$$BC' \times AC = BC \times A'C'$$

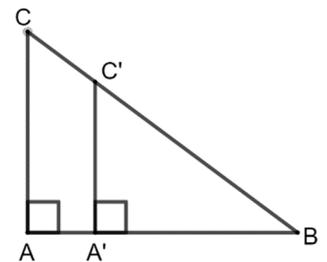
$$\div BC' \quad \div BC \quad \div BC \quad \div BC'$$

$$\text{donc } \frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{BC'} = \text{sinus de l'angle } \hat{B}$$

$$BA' \times AC = BA \times A'C'$$

$$\div BA' \quad \div BA \quad \div BA \quad \div BA'$$

$$\text{donc } \frac{AC}{BA} = \frac{A'C'}{BA'} = \text{tangente de l'angle } \hat{B}$$



Propriété

Dans un triangle rectangle :

- Le **cosinus** d'un angle aigu est le quotient du côté adjacent à cet angle par l'hypoténuse.
- Le **sinus** d'un angle aigu est le quotient du côté opposé à cet angle par l'hypoténuse.
- La **tangente** d'un angle aigu est le quotient du côté opposé à cet angle par son côté adjacent.

⚠ **Comment** se rappeler des formules ?

Méthode 1 : ♥ **SOHCAHTOA** Sin = Opposé / Hypoténuse Cos = Adjacent / Hypoténuse Tan = Opposé / Adjacent

Méthode 2 : ♥ **CAHSOHTOA** Cos = Adjacent / Hypoténuse Sin = Opposé / Hypoténuse Tan = Opposé / Adjacent

Méthode 3 :

♥ **COS ADJ HYP**

COSinus = **ADJ**acent / **HYP**oténuse

♥ **SIN OPP HYP**

SINus = **OPP**osé / **HYP**oténuse

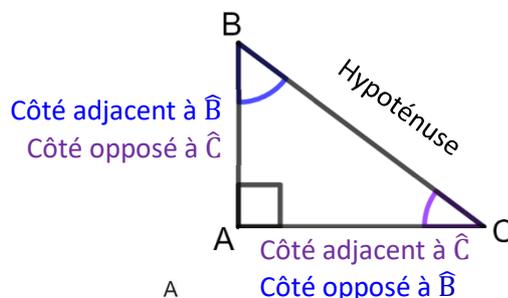
♥ **TANG OPPADJ**

TANGente = **OPP**osé / **ADJ**acent

Formules

$$\cos(\widehat{B}) = \frac{AB}{BC} \quad \sin(\widehat{B}) = \frac{AC}{BC} \quad \tan(\widehat{B}) = \frac{AC}{AB}$$

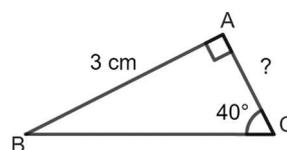
$$\cos(\widehat{C}) = \frac{AC}{BC} \quad \sin(\widehat{C}) = \frac{AB}{BC} \quad \tan(\widehat{C}) = \frac{AB}{AC}$$



Exemple de recherche d'un côté

Énoncé

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 3 \text{ cm}$ et $\widehat{ACB} = 40^\circ$.
 Calcule AC ; donne une valeur approchée au centième près.



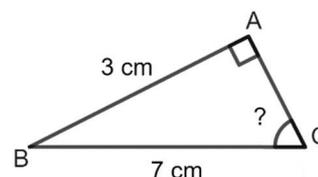
Réponse

Dans ABC rectangle en A	On cite le triangle rectangle
On connaît : • \widehat{C} • AB : opposé	On identifie l'angle connu, le côté connu et le côté cherché.
On cherche : • AC : adjacent	
La formule doit contenir opposé et adjacent ; on va utiliser la tangente	On cherche la formule qui comprend ces informations.
$\tan(\widehat{C}) = \frac{AB}{AC}$	On écrit la formule avec les « lettres » en veillant bien à placer les numérateurs et dénominateurs au « bon » endroit.
$\tan(40^\circ) = \frac{3}{AC}$	On remplace les valeurs connues
$\frac{\tan(40^\circ)}{1} = \frac{3}{AC}$	On transforme l'écriture pour obtenir deux fractions égales
$AC = \frac{3 \times 1}{\tan(40^\circ)} \approx 3,58 \text{ cm}$	On effectue les produits en croix On donne une valeur approchée On n'oublie pas l'unité

Exemple de recherche d'un angle

Énoncé

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 3 \text{ cm}$ et $BC = 7 \text{ cm}$.
 Calcule \widehat{C} ; donne une valeur approchée au degré près.



Réponse

Dans ABC rectangle en A	On cherche : • \widehat{C}
$\sin(\widehat{C}) = \frac{AB}{BC}$	On connaît : • BC : hypoténuse • AB : opposé
$\sin(\widehat{C}) = \frac{3}{7}$	La formule doit contenir opposé et hypoténuse ; on va utiliser le sinus
$\widehat{C} = \arcsin\left(\frac{3}{7}\right) \approx 25^\circ$	

Utilisation de la calculatrice

CASIO FX92	
Pour calculer $\frac{3 \times 1}{\tan(40^\circ)}$, je tape	Pour calculer $\arcsin\left(\frac{3}{7}\right)$, je tape



La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas.

$\sqrt{-1}$ n'existe pas
 $\sqrt{-4}$ n'existe pas

Au lycée, une solution sera proposée pour ces racines carrées : les nombres imaginaires.

Remarques sur la racine cubique

$$\begin{array}{ccc} & \rightarrow \blacksquare^3 \rightarrow & \\ 5 & & 125 \\ & \leftarrow \sqrt[3]{\blacksquare} \leftarrow & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \sqrt[3]{1} = 1 & \sqrt[3]{8} = 2 & \sqrt[3]{27} = 3 & \sqrt[3]{64} = 4 & \sqrt[3]{125} = 5 \\ \sqrt[3]{216} = 6 & \sqrt[3]{343} = 7 & \sqrt[3]{512} = 8 & \sqrt[3]{729} = 9 & \sqrt[3]{1000} = 10 \\ \sqrt[3]{-1} = -1 & \sqrt[3]{-8} = -2 & \sqrt[3]{-27} = -3 & \sqrt[3]{-64} = -4 & \sqrt[3]{-125} = -5 \\ \sqrt[3]{-216} = -6 & \sqrt[3]{-343} = -7 & \sqrt[3]{-512} = -8 & \sqrt[3]{-729} = -9 & \sqrt[3]{-1000} = -10 \end{array}$$

Propriétés admises

Soient a et b deux nombres positifs avec b non nul.

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2} &= a \\ \sqrt{a^2} &= a \\ \sqrt{a \times b} &= \sqrt{a} \times \sqrt{b} \\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \end{aligned}$$

Pour tous les nombres a et b avec b non nul.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a^3} &= a \\ \sqrt{a^3} &= a \\ \sqrt[3]{a \times b} &= \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} \\ \sqrt[3]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \end{aligned}$$

Exemples de calculs

$$\begin{array}{ll} \sqrt{5^2} = 5 & \sqrt{1,2^2} = 1,2 \\ \sqrt{3^2} = 3 & \sqrt{5,2^2} = 5,2 \\ \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2} & \sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4 \\ \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5} & \frac{\sqrt{200}}{\sqrt{50}} = \sqrt{\frac{200}{50}} = \sqrt{4} = 2 \\ \sqrt[3]{7^3} = 7 & \sqrt[3]{-8^3} = -8 \\ \sqrt{11^3} = 11 & \sqrt[3]{(-4)^3} = -4 \\ \sqrt[3]{50} \times \sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{50 \times 20} = \sqrt[3]{1000} = 10 & \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \times 2} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2} \\ \sqrt[3]{\frac{125}{27}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{5}{3} & \frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3 \end{array}$$

Définition

Simplifier une racine s'est transformer une racine en produit d'un entier par une racine d'un nombre dont la distance à zéro est plus petite.

Astuce

Pour simplifier la racine d'un entier, il faut écrire l'entier sous la forme du produit d'un carré (ou cube) par un entier

Exemples de simplification de racines carrées

$$\begin{aligned} \sqrt{50} &= \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2} & \sqrt{24} &= \sqrt{4 \times 6} = \sqrt{4} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6} \\ \sqrt{147} &= \sqrt{49 \times 3} = \sqrt{49} \times \sqrt{3} = 7\sqrt{3} & \sqrt{20} &= \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5} \\ \sqrt{72} &= \sqrt{4 \times 18} = \sqrt{4} \times \sqrt{18} = 2\sqrt{18} = 2\sqrt{9 \times 2} = 2 \times \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 2 \times 3 \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2} \\ \sqrt{72} &= \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = 6\sqrt{2} \\ 7\sqrt{50} - 4\sqrt{18} &= 7 \times \sqrt{25 \times 2} - 4 \times \sqrt{9 \times 2} = 7 \times \sqrt{25} \times \sqrt{2} - 4 \times \sqrt{9} \times \sqrt{2} \\ &= 7 \times 5 \times \sqrt{2} - 4 \times 3 \times \sqrt{2} = 35\sqrt{2} - 12\sqrt{2} = 23\sqrt{2} \end{aligned}$$

Exemples de simplification de racines cubiques

$$\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8 \times 4} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4} \qquad \sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{125 \times 2} = \sqrt[3]{125} \times \sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{2}$$

$$\begin{aligned} 11\sqrt[3]{24} + 7\sqrt[3]{-375} &= 11\sqrt[3]{8 \times 3} + 7\sqrt[3]{-125 \times 3} = 11 \times \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{3} + 7 \times \sqrt[3]{-125} \times \sqrt[3]{3} \\ &= 11 \times 2 \times \sqrt[3]{3} + 7 \times (-5) \times \sqrt[3]{3} = 22\sqrt[3]{3} - 35\sqrt[3]{3} = -13\sqrt[3]{3} \end{aligned}$$

Remarques

Les racines doivent être simplifiées.

Les calculatrices simplifient automatiquement les racines carrées.

Exemple avec décomposition en produit de facteurs premiers

$$31104 = 2^7 \times 3^5$$

$$\begin{aligned} \sqrt{31104} &= \sqrt{2^7 \times 3^5} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3} \\ &= \sqrt{2^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3} \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times \sqrt{2} \times 3 \times 3 \times \sqrt{3} \\ &= 72\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{31104} &= \sqrt[3]{2^7 \times 3^5} = \sqrt[3]{2^3 \times 2^3 \times 2 \times 3^3 \times 3^2} \\ &= \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{3^2} \\ &= 2 \times 2 \times \sqrt[3]{2} \times 3 \times \sqrt[3]{3^2} \\ &= 12\sqrt[3]{18} \end{aligned}$$