Théorème de THALES

Rappel admise

Pour passer du nombre a au nombre b, on multiplie par $\frac{b}{a}$.

$$a \xrightarrow{\times \frac{b}{a}} b \qquad \textit{départ} \xrightarrow{\times \frac{\textit{arrivée}}{\textit{départ}}} \textit{arrivée}$$

Exemples

$$5 \xrightarrow{\times 3} 15 \qquad 5 \xrightarrow{\times 13} 65 \qquad 5 \xrightarrow[\times 129]{\times \frac{645}{5} \text{ ou}} 645 \qquad 5 \xrightarrow{\times \frac{7}{5}} 7 \qquad 7 \xrightarrow{\times \frac{3}{7}} 3$$

Comment identifier que deux triangles sont homothétiques l'un de l'autre ?

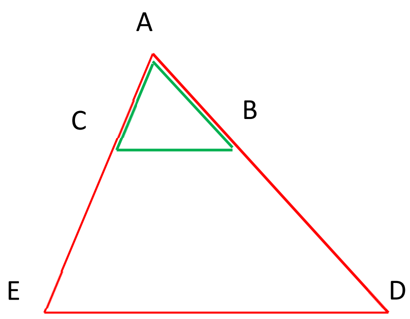
Soit ABC un triangle.

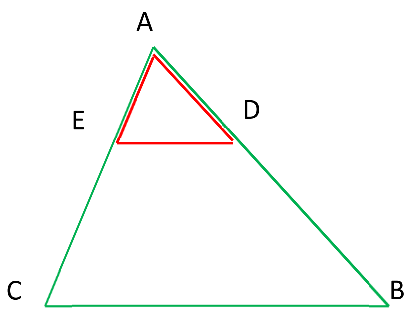
Si D∈ (AB) et E∈ (AC) et (BC)//(DE) alors ADE et ABC sont homothétiques l'un par rapport à l'autre.

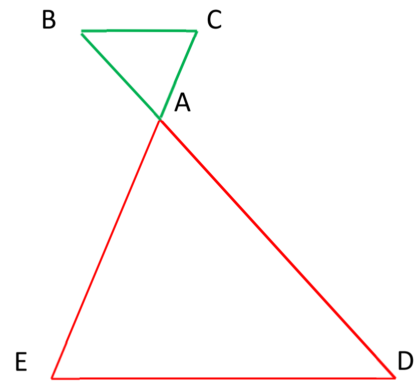
Théorème de Thalès

Soit ABC un triangle.

Si D∈ (AB) et E∈ (AC) tels que (BC)//(DE) alors $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$ $\quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$







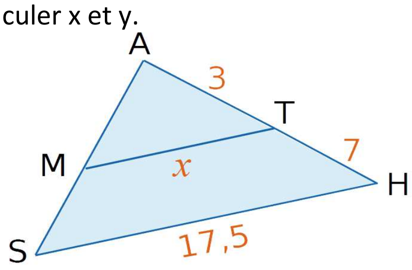
"Démonstration"

Les trois quotients intervenant dans le théorème sont les coefficients d'agrandissement/réduction permettant de passer de ABC à ADE.

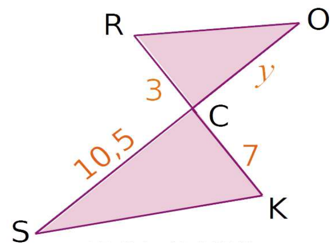
Exemples

Sur les figures ci-dessous, les distances sont en centimètres.

Calculer x et y.



(MT)//(SH)



(RO)//(SK)

Comme A, T, H et A, M, S sont alignés et comme (MT)//(HS), d'après le théorème de Thalès

$$\frac{AT}{AH} = \frac{AM}{AS} = \frac{MT}{SH}$$

$$\frac{3}{10} = \frac{AM}{AS} = \frac{x}{17{,}5}$$

$$x = \frac{3 \times 17{,}5}{10} = 5{,}25 \text{ cm}$$

Comme R, C, K et O, C, S sont alignés et comme (RO)//(KS), d'après le théorème de Thalès

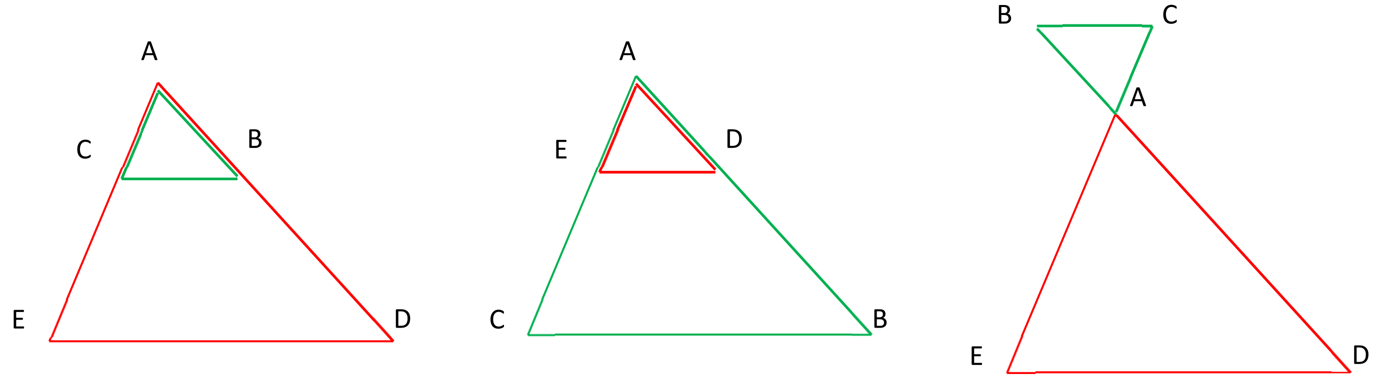
$$\frac{CR}{CK} = \frac{CO}{CS} = \frac{RO}{SK}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{y}{10{,}5} = \frac{RO}{SK}$$

$$y = \frac{3 \times 10{,}5}{7} = 4{,}5 \text{ cm}$$

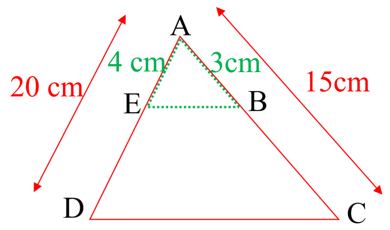
Propriété réciproque de Thalès - admise
Si A, B, D et A, C, E sont alignés dans cet ordre et si
$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$
alors **(BC)//(DE)**

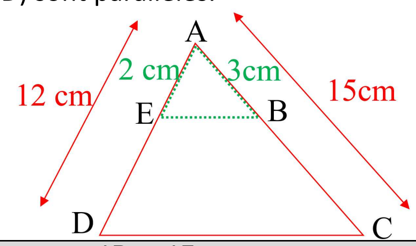
Propriété contraposée de Thalès - admise
Si A, B, D et A, C, E sont alignés dans cet ordre et si
$\frac{AB}{AD} \neq \frac{AC}{AE}$
alors **(BC) et (DE) ne sont pas parallèles**



Exemples

On cherche à savoir si les droites (BE) et (CD) sont parallèles.



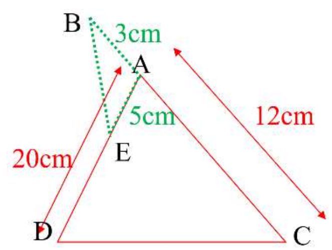


Si les droites (BE) et (CD) étaient parallèles, le théorème de Thalès donnerait $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$. On calcule séparément ces deux rapports

$\mathbf{\frac{AB}{AC} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}}$ $\frac{AE}{AD} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ donc $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$ et comme A, B, C et A, E, D sont alignés dans le même ordre, d'après la propriété réciproque de Thalès alors (BE)//(CD).	$\frac{AB}{AC} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ $\frac{AE}{AD} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ donc $\frac{AB}{AC} \neq \frac{AE}{AD}$ et comme A, B, C et A, E, D sont alignés dans le même ordre, d'après la contraposée de Thalès alors (BE) et (CD) ne sont pas parallèles.

Remarque

La condition d'alignement dans le même ordre est indispensable.



On a : $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$
On a aussi : $\frac{AE}{AD} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$
Donc $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$ et pourtant les droites (BE) et (CD) ne sont pas parallèles.

Soit B devrait appartenir à [AC], soit E devrait appartenir à [DA) sans appartenir à [DA].