Factorisations – Equations produits

Définition

Factoriser, c'est transformer une somme en un produit.

Développer, c'est transformer un produit en une somme.

Exemples

Développer

$(x + 3)(x + 2) = x^2 + 5x + 6$

Factoriser

Développer

$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

Factoriser

Développer

$(x + 5) \times (x - 5) = x^2 - 25$

Factoriser

Remarque

Il est toujours possible de développer, mais il n'est pas toujours possible de factoriser.

Comment factoriser en reconnaissant un facteur commun ?	Exemple
On coupe l'expression en « blocs » séparés par les additions et les soustractions. On ne coupe pas en 2 une parenthèse.	$\underbrace{5x} + \underbrace{3x}$
On reconnait (ou on fait apparaitre) un facteur commun dans une expression. On peut souligner le facteur commun.	$= 5\times\underline{x} + 3\times\underline{x}$
On isole ce facteur commun en utilisant la propriété de simple distributivité : $k\times a + k\times b = k\times (a + b)$. Dans la parenthèse on place alors tout ce qui n'a pas été souligné.	$= x\times (5 + 3)$ $= 8x$

Exemples

$5x^2 - 3x + 2xy = \underbrace{5\,\underline{x}\,x} - \underbrace{3\,\underline{x}} + \underbrace{2\,\underline{x}\,y} = x\,(5x - 3 + 2y)$

$\underline{(5x + 3)}(2x - 7) + \underline{(5x + 3)}(4x + 5)$ $= (5x + 3)[(2x - 7) + (4x + 5)]$ $= (5x + 3)[2x - 7 + 4x + 5]$ $= (5x + 3)(6x - 2)$	$\underline{(7x - 2)}(2x - 7) - (5x + 4)\underline{(7x - 2)}$ $= (7x - 2)[(2x - 7) - (5x + 4)]$ $= (7x - 2)[2x - 7 - 5x - 4]$ $= (7x - 2)(-3x - 11)$
$\underline{(3x + 4)}(5x - 2) + 7\,\underline{(3x + 4)}(4x + 5)$ $= (3x + 4)[(5x - 2) + 7\,(4x + 5)]$ $= (3x + 4)[5x - 2 + 28x + 35]$ $= (3x + 4)(33x + 33)$	$\underline{(3x + 4)}(5x - 2) - 7\,\underline{(3x + 4)}(4x + 5)$ $= (3x + 4)[(5x - 2) - 7\,(4x + 5)]$ $= (3x + 4)[5x - 2 - 28x - 35]$ $= (3x + 4)(-23x - 37)$

Exemple complexe

$(3x + 5)(x - 2) + 3\,\mathbf{(5x - 10)}$ ↓ $\mathbf{5x - 10} = \underline{5}\times x - \underline{5}\times 2 = \underline{5}\,(x - 2)$

$= (3x + 5)\,\underline{(x - 2)} + 3 \times 5\,\underline{(x - 2)}$

$= (x - 2)[(3x + 5) + 3 \times 5]$

$= (x - 2)[3x + 5 + 15]$

$= (x - 2)(3x + 20)$

Remarque

Si on ne trouve pas de facteur commun, on essaye la méthode ci-dessous.

Comment factoriser en reconnaissant une différence de 2 carrés ?

1. On transforme, si possible, l'expression en une différence de deux carrés.
2. On factorise en utilisant la propriété $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Exemples

$x^2 - 9 \quad = \quad x^2 - 3^2 = (x + 3)(x - 3)$

$\qquad\qquad\quad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x + 5)(2x - 5)$

$(3x + 5)^2 - 49 = (3x + 5)^2 - 7^2 = [(3x + 5) + 7]\ [(3x + 5) - 7] = [3x + 5 + 7]\ [3x + 5 - 7] = (3x + 12)\ (3x - 2)$

$(3x + 5)^2 - (7x - 6)^2 = [(3x + 5) + (7x - 6)]\ [(3x + 5) - (7x - 6)] = [3x + 5 + 7x - 6]\ [3x + 5 - 7x + 6]$
$= (10x - 1)\ (-4x + 11)$

Remarque

Si on ne trouve pas de différence de deux carrés, on essaye la méthode ci-dessous.

Comment factoriser en reconnaissant le développement de la 1ère ou 2ème identité remarquable ?

1. On identifie l'identité remarquable.
2. On identifie les deux « carrés ».
3. On vérifie que le double produit est le bon.
4. On factorise en utilisant une des propriétés : $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ *ou* $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Exemple

On veut factoriser $x^2 + 6x + 9$.

Il y a trois termes et cela ressemble au développement de la première identité remarquable : $a^2 + 2ab + b^2$.
On identifie x^2 et 9 comme les carrés de x et 3.
On calcule $2 \times x \times 3 = 6x$ et on reconnait le morceau non choisi de l'expression.
On conclue : $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = (x + 3)^2$

Exemples

$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$	$x^2 - 14x + 49 = (x - 7)^2$
x^2 est le carré de x 25 est le carré de 5 Il y a un « + » devant le double produit. On vérifie que $2 \times x \times 5$ est bien égal au troisième terme : $10x$	x^2 est le carré de x 49 est le carré de 7 Il y a un « - » devant le double produit. On vérifie que $2 \times x \times 7$ est bien égal au troisième terme : $14x$

$16x^2 + 24x + 9 = (4x + 3)^2$

Remarque

On veut factoriser $x^2 + 7x + 49$
x^2 et 49 sont les carrés de x et 7
On calcule $2 \times x \times 7 = 14x$. On ne trouve pas $7x$
On ne peut pas factoriser $x^2 + 7x + 49$ avec cette méthode.

Propriété équation produit - admise

♥ Un produit est nul si et seulement si l'un, au moins, des facteurs est nul.

Exemple

On veut résoudre l'équation (2x + 5) (5x - 3) = 0

$(2x + 5)\ (5x - 3) = 0$ — On réécrit l'équation

Un produit est nul si et seulement si l'un, au moins, des facteurs est nul. — On cite la propriété

$2x + 5 = 0$	$5x - 3 = 0$
$2x = -5$	$5x = 3$
$x = -2{,}5$	$x = 0{,}6$

On résout séparément les équations.
Bien laisser le trait vertical.

Si $x = -2{,}5$ alors $(2x + 5)\ (5x - 3)$
$= (2\times(-2{,}5) + 5) \times (5\times(-2{,}5) - 3)$
$= 0$

Si $x = 0{,}6$ alors $(2x + 5)\ (5x - 3)$
$= (2\times 0{,}6 + 5) \times (5\times 0{,}6 - 3)$
$= 0$

On vérifie en testant si les nombres trouvés sont solution de l'équation

Les solutions de l'équation sont -2,5 et 0,6.
On peut aussi écrire : $S = \{-2{,}5\ ; 0{,}6\}$

On conclue par une phrase

Remarques

Pour utiliser cette propriété, il faut que l'on ait un produit.

Pour cela, il peut être nécessaire de factoriser l'expression ; c'est même le principal intérêt de la factorisation.

Propriété

L'équation $x^2 = a$ admet :

- aucune solution si $a < 0$.
- une seule solution si $a = 0$; la solution est 0.
- deux solutions si $a > 0$; les solutions sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Démonstration

Si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution car un carré ne peut pas être négatif.

Si $a > 0$ on a alors : $a = \sqrt{a}^2$

L'équation $x^2 = a$ devient $x^2 = \sqrt{a}^2$ soit $x^2 - \sqrt{a}^2 = 0$ soit $(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a}) = 0$

Or « un produit est nul si et seulement si l'un, au moins, des facteurs est nul »,

$$\begin{array}{r|l} x+\sqrt{a} = 0 & x-\sqrt{a} = 0 \\ x = -\sqrt{a} & x = \sqrt{a} \end{array}$$

Exemples

L'équation $x^2 = -4$ **n'a pas de solution** car $-4 < 0$.

L'équation $x^2 = 0$ a une seule solution **0**.

L'équation $x^2 = 64$ a deux solutions : $\sqrt{64}$ et $-\sqrt{64}$ soit **8 et -8**.

L'équation $x^2 = 11$ a deux solutions : $\mathbf{\sqrt{11}}$ **et** $\mathbf{-\sqrt{11}}$.

Exemple complexe

Résoudre l'équation $(x + 3)^2 = 7$.

$$(x+3)^2 = 7$$

$$\begin{array}{l|l} x+3 = \sqrt{7} & x+3 = -\sqrt{7} \\ x = -3+\sqrt{7} & x = -3-\sqrt{7} \end{array}$$

Les solutions sont $\mathbf{-3+\sqrt{7}}$ et $\mathbf{-3-\sqrt{7}}$