Agrandissement / réduction, triangles semblables, droite des milieux, théorème de Thalès

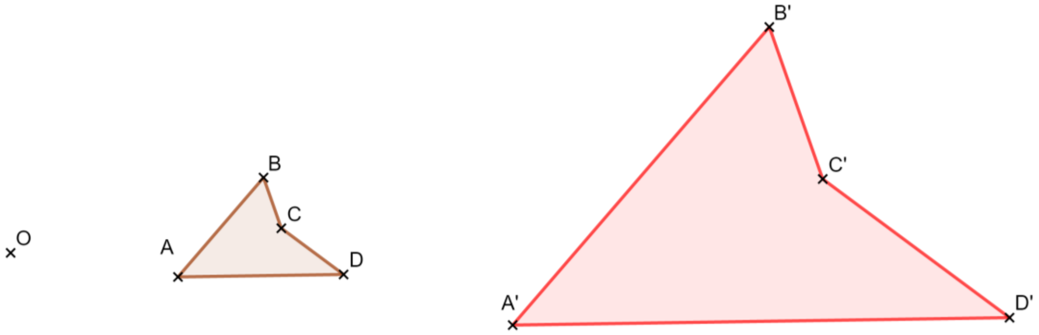
I – Agrandissements / réductions

Définition

Le point A’ est l’image du point A par l’*homothétie* de centre O et de coefficient k si :

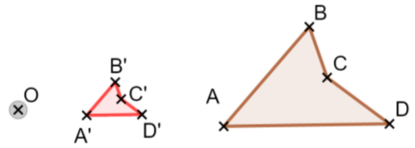
- A’ $\in$ (OA)
- OA’ = k × OA

Si le coefficient est supérieur à 1, on parle d’*agrandissement*.



Le quadrilatère A’B’C’D’ est agrandissement de ABCD de centre O et de coefficient 3.

Si le coefficient est entre 0 et 1, on parle de *réduction*.

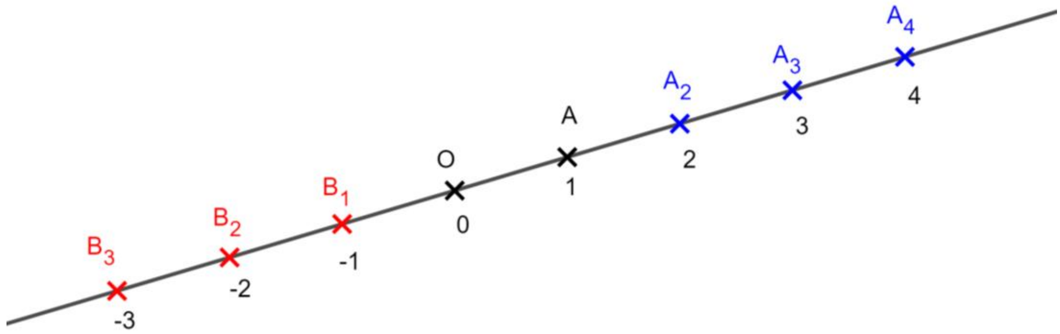


Le quadrilatère A’B’C’D’ est la réduction de ABCD de centre O et de coefficient $\frac{1}{3}$.

Construction

Pour construire l’image du point A par l’homothétie de centre O et de rapport k, il faut :

- Si k>0, tracer [OA) puis mesurer [OA] et placer A’ sur [OA) tel que OA’ = k × OA
- Si k<0, tracer [AO) puis mesurer [OA] et placer A’ sur [AO) tel que OA’ = ***distance à 0 de*** k × OA



- A_2 est l’image de A par l’homothétie de centre O et de rapport 2
- A_3 est l’image de A par l’homothétie de centre O et de rapport 3
- A_4 est l’image de A par l’homothétie de centre O et de rapport 4
- B_1 est l’image de A par l’homothétie de centre O et de rapport -1
- B_2 est l’image de A par l’homothétie de centre O et de rapport -2
- B_3 est l’image de A par l’homothétie de centre O et de rapport -3

Remarque

Une homothétie de rapport -1 est une symétrie centrale

Propriété admise

L'homothétie conserve les angles, les formes mais pas les distances et les surfaces.

Remarque

Pour construire l'image d'une figure complexe, on commence par construire l'image de quelques points remarquables de la figure, puis on la complète en utilisant la propriété ci-dessus.

Pour construire la figure ci-contre, j'ai :

1. Tracer l'image A' de A
2. Tracer l'image B' de B
3. Construis le carré A'B'C'D'.
4. Tracer la diagonale [A'C']
5. Placer son milieu E'.
6. Tracer le segment [B'E'].
7. Placer le point M' au milieu de [A'B'].
8. Tracer le demi-cercle de diamètre [A'B'] à l'extérieur du carré.

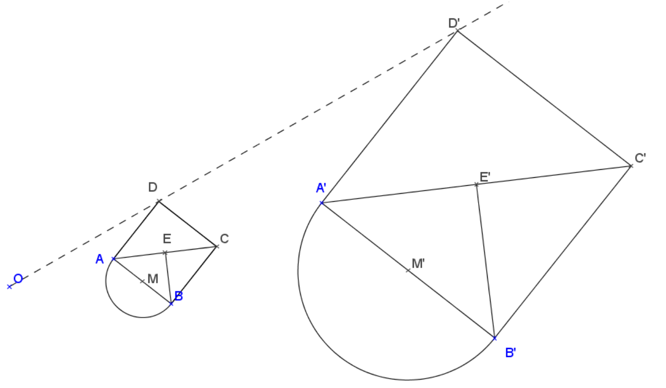


Image par l'homothétie de centre O et de rapport 3.

Caractériser

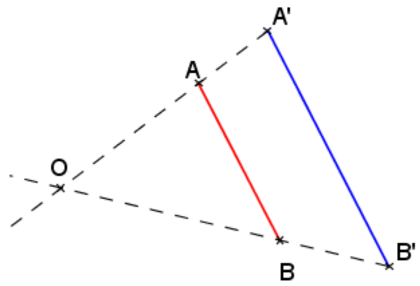
Pour caractériser une homothétie, il faut trouver son centre et son rapport.

Repérer 2 points A et B et leurs images A' et B' telles que ces points ne soient pas alignés.

Tracer les 2 demi-droites [A'A) et [B'B) ; elles se coupent en O qui est le centre.

Mesurer [OA] et [OA'].

Le rapport k vérifie : $k = \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$.



II – Triangles semblables

Définition

Deux triangles sont *semblables* s'ils ont la même forme, mais pas nécessairement la même taille.

Propriété admise

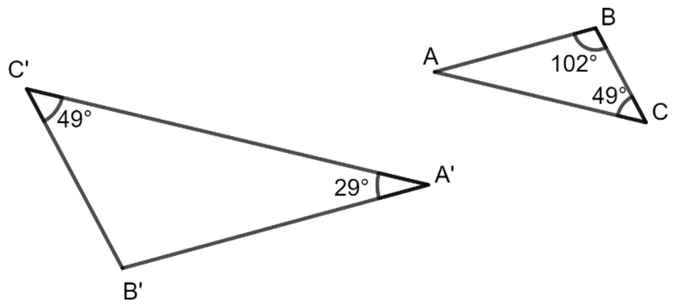
Deux triangles sont semblables :

- si leurs côtés sont proportionnels

ou

- s'ils ont les mêmes angles.

Exemple 1 : avec des angles

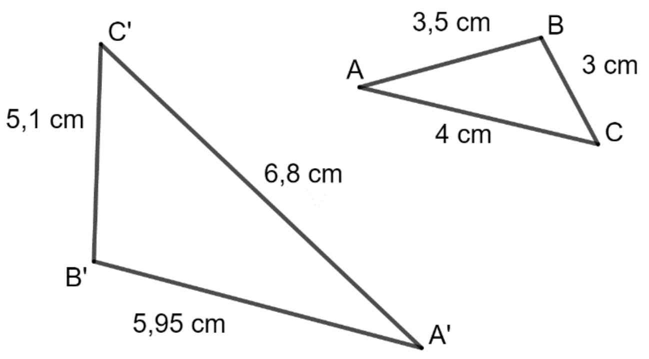


Dans le triangle ABC, on a
$\widehat{A} = 180 - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180 - (102 + 49) = 29°$.

Dans le triangle A'B'C', on a
$\widehat{B}' = 180 - (\widehat{A}' + \widehat{C}') = 180 - (49 + 29) = 102°$.

On a donc $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$ et $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ donc les triangles **ABC et A'B'C' sont semblables**.

<u>Exemple 2</u> : avec des côtés proportionnels



$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{5{,}95}{3{,}5} = 1{,}7$$

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{6{,}8}{4} = 1{,}7$$

$$\frac{C'B'}{CB} = \frac{5{,}1}{3} = 1{,}7$$

Donc $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{C'B'}{CB}$ donc les triangles **ABC et A'B'C' sont semblables**.

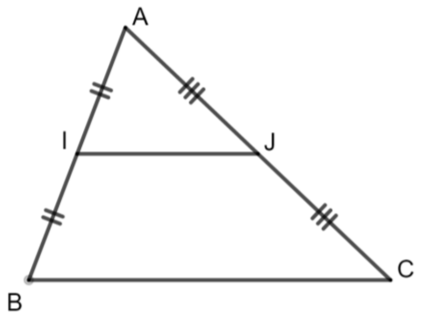
III – Droite des milieux

<u>Définition</u>

Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu de deux côtés est appelée la droite des milieux.

<u>Propriété</u> de la droite des milieux

- Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu de deux côtés est parallèle au troisième côté.
- Soit ABC un triangle tel que I et J sont les milieux de [AB] et [AC] ; alors (IJ) // (BC)



Pour utiliser cette propriété, il faut :

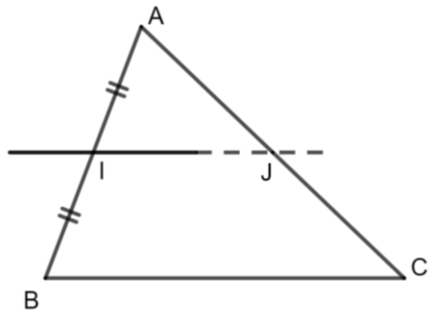
- un triangle,
- la droite qui passe par le milieu de 2 côtés.

Cette propriété sert à prouver que :

- deux droites sont parallèles.

<u>Propriété</u> réciproque de la droite des milieux - admise

- Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté en étant parallèle à un deuxième côté ; alors cette droite passe par le milieu du troisième côté.
- Soit ABC un triangle tel que I est le milieu de [AB] et J est le point de [AC] tel que (IJ) // (BC) ; alors J est le milieu de [AC].



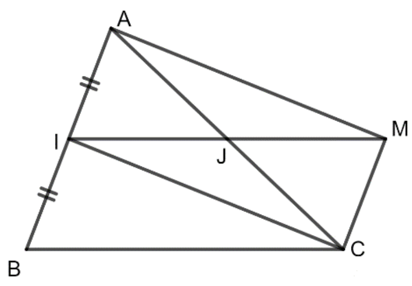
Pour utiliser cette propriété, il faut :

- un triangle,
- le milieu d'un côté,
- la droite qui passe ce milieu en étant parallèle à un autre côté.

Cette propriété sert à prouver que :

- un point est le milieu d'un segment.

<u>Démonstration</u>



On suppose ABC est un triangle, que I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AC], que M est le symétrique de I par rapport à J.
On veut prouver que IJ = BC/2 et (IJ) // (BC).

1 Comme M est le symétrique de I par rapport à J, d'après la définition de la symétrie centrale, alors J est le milieu de [IM].

2 Comme J est le milieu de [AC] et [IM], d'après la propriété "si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme", alors AMCI est un parallélogramme.

3 Comme AMCI est un parallélogramme, d'après la propriété P_1 "si un quadrilatère est un parallélogramme alors il a deux côtés de même longueur et parallèles", alors (AI) // (MC) et AI = MC.

4 Comme I $\in$ (AB) et (AI) // (MC) alors (BI) // (MC).

5 Comme I est le milieu de [AB], d'après la définition du milieu, alors AI = IB.
6 Comme AI = MC et AI = IB alors MC = IB.
7 Comme (BI) // (MC) et MC = IB, d'après la propriété "si un quadrilatère a deux côtés de même longueur et parallèles alors c'est un parallélogramme", alors MIBC est un parallélogramme.
8 Comme MIBC est un parallélogramme, d'après la propriété P_1, alors (MI) // (BC) et MI = BC.
9 Comme J $\in$ (MI) et (MI) // (BC) alors (IJ) // (BC) (propriété de la droite des milieux).
10 Comme J est le milieu de [IM], d'après la définition du milieu, alors IJ = MI/2.
11 Comme MI = BC et IJ = MI/2 alors IJ = BC / 2 (propriété complémentaire de la droite des milieux).

Ce **Q**u'il **F**allait **D**émontrer

<u>Propriété</u> complémentaire de la droite des milieux

- Dans un triangle, le segment qui relie le milieu de deux côtés mesure la moitié du troisième côté.
- Soit ABC un triangle tel que I et J sont les milieux de [AB] et [AC] ; $\mathrm{IJ} = \frac{\mathrm{BC}}{2}$.

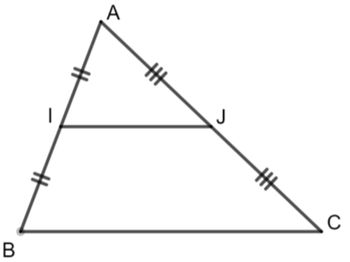
Pour utiliser cette propriété, il faut :

- un triangle,
- le segment qui relie le milieu de 2 côtés.

Cette propriété sert à calculer la longueur d'un segment.

<u>Exemple</u> 1

Soit ABC un triangle tel que I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AC].
Prouve que (IJ) // (BC).

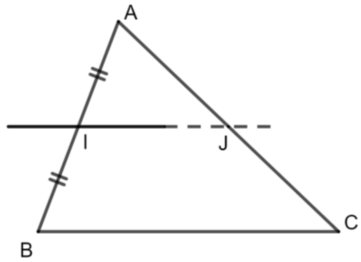


ON SAIT QUE I et J sont les milieux de [AB] et [AC]
D'APRES la propriété de la droite des milieux
ALORS **(IJ) // (BC)**.

CQFD

<u>Exemple</u> 2

Soit ABC un triangle tel que I est le milieu de [AB] et J est le point de [AC] tel que (IJ) // (BC).
Prouve que J est le milieu de [AC].



ON SAIT QUE que I est le milieu de [AB] et J est le point de [AC] tel que (IJ) // (BC)
D'APRES la propriété réciproque de la droite des milieux
ALORS **J est le milieu de [AC]**.

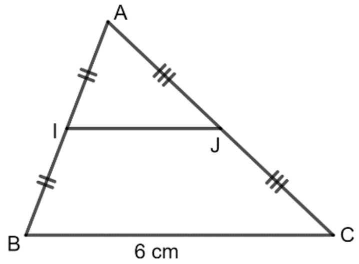
CQFD

<u>Exemple</u> 3

Soit ABC un triangle tel que

- *I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [AC],*
- *BC = 6 cm.*

Calcule IJ.



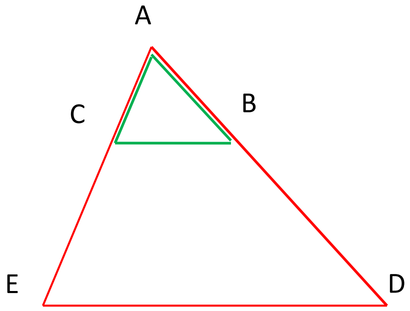
ON SAIT QUE I et J sont les milieux de [AB] et [AC]
D'APRES la propriété complémentaire de la droite des milieux
ALORS $\mathrm{IJ} = \frac{\mathrm{BC}}{2} = \frac{6}{2} =$ **3 cm**.

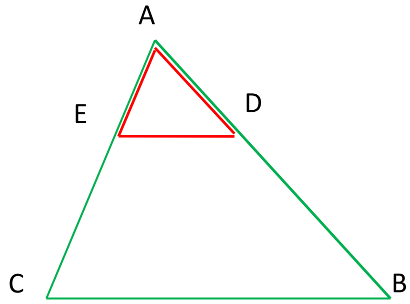
IV – Théorème de Thalès

Théorème de Thalès

Soit ABC un triangle.

Si D∈(AB) et E∈(AC) tels que (BC)//(DE) alors $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AC}{AE}=\dfrac{BC}{DE}$ $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{DE}{BC}$



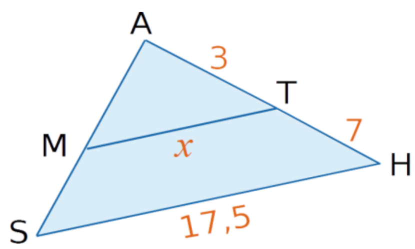


"Démonstration"

Les trois quotients intervenant dans le théorème sont les coefficients d'agrandissement/réduction permettant de passer de ABC à ADE.

Exemple

Sur les figures ci-dessous, les distances sont en centimètres.
Calcule x.



(MT)//(SH)

Comme A, T, H et A, M, S sont alignés et comme (MT)//(HS), d'après le théorème de Thalès

$$\frac{AT}{AH}=\frac{AM}{AS}=\frac{MT}{SH}$$

$$\frac{3}{10}=\frac{AM}{AS}=\frac{x}{17{,}5}$$

$$x=\frac{3\times 17{,}5}{10}=\mathbf{5,25\ cm}$$

Propriété réciproque de Thalès - admise

Si A, B, D et A, C, E sont alignés dans cet ordre et si

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$$

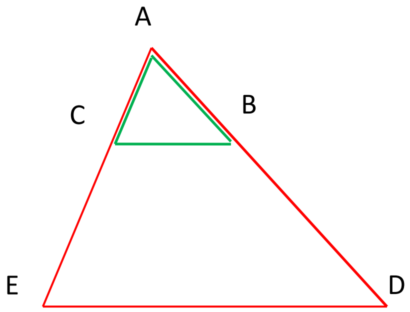
alors (BC)//(DE)

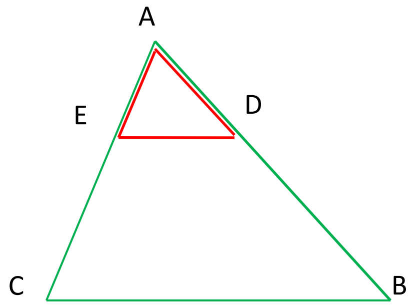
Propriété contraposée de Thalès - admise

Si A, B, D et A, C, E sont alignés dans cet ordre et si

$$\frac{AB}{AD}\neq\frac{AC}{AE}$$

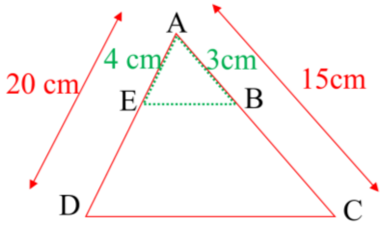
alors (BC) et (DE) ne sont pas parallèles

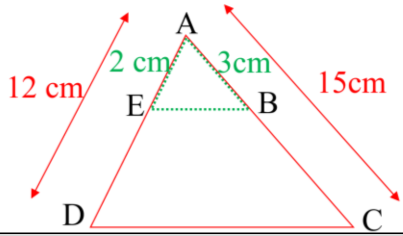




Exemples

On cherche à savoir si les droites (BE) et (CD) sont parallèles.





Si les droites (BE) et (CD) étaient parallèles, le théorème de Thalès donnerait $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AD}}$. On calcule séparément ces deux rapports

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$
$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AD}} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

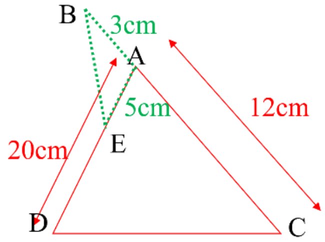
donc $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AD}}$ et comme A, B, C et A, E, D sont alignés dans le même ordre, d'après la propriété réciproque de Thalès alors **(BE)//(CD)**.

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$
$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AD}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

donc $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} \neq \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AD}}$ et comme A, B, C et A, E, D sont alignés dans le même ordre, d'après la contraposée de Thalès alors **(BE) et (CD) ne sont pas parallèles**.

Remarque

La condition d'alignement dans le même ordre est indispensable.



On a : $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

On a aussi : $\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AD}} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

Donc $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AD}}$ et pourtant les droites (BE) et (CD) ne sont pas parallèles.

Soit B devrait appartenir à [AC], soit E devrait appartenir à [DA) sans appartenir à [DA].