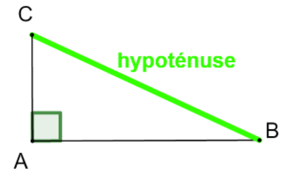
Triangles rectangles :
Pythagore et relations trigonométriques.

I - PYTHAGORE

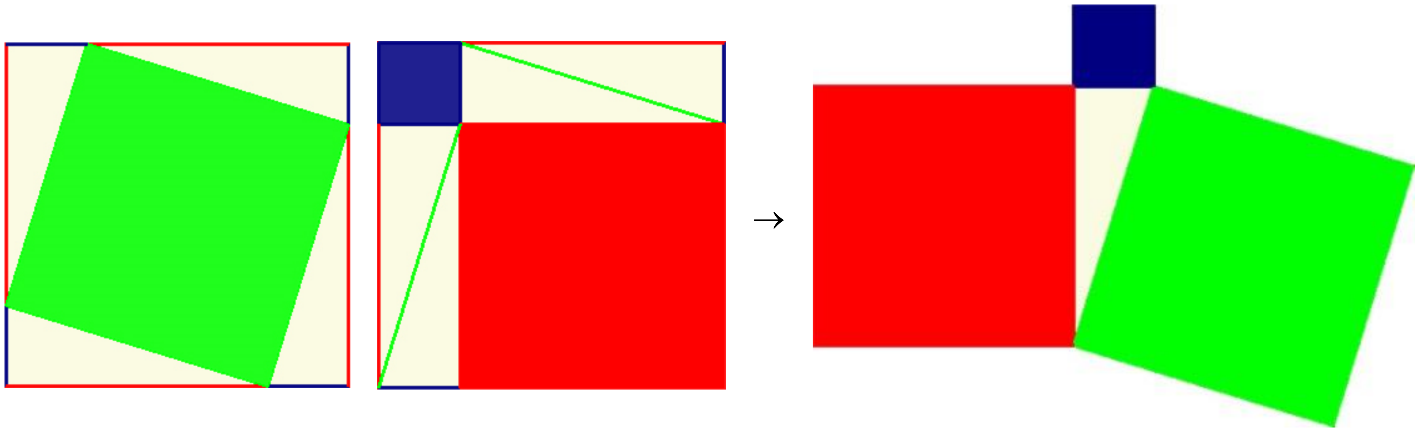
Définition

Dans un triangle, le côté opposé à l'angle droit est appelé l'*hypoténuse*.



Remarque

C'est le plus grand côté du triangle rectangle.



Théorème de Pythagore admis

- Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.
- Si ABC un triangle rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

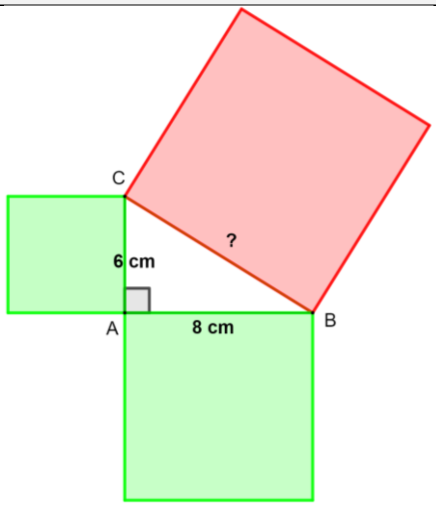
⚠***Cette propriété ne s'applique que dans les triangles rectangles.***

Exemples

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que

- AB = 6 cm
- AC = 8 cm

Calcule BC.



Dans ABC rectangle en A,
d'après le théorème de Pythagore

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$BC^2 = 6^2 + 8^2$

$BC^2 = 36 + 64$

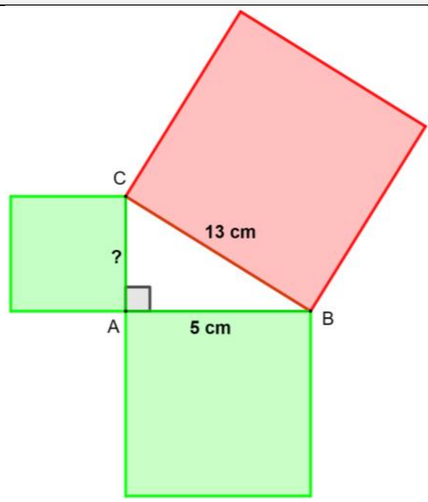
$BC^2 = 100$

$BC = \sqrt{\mathbf{100}} = \mathbf{10\ cm}$

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que

- AB = 5 cm
- BC = 13 cm

Calcule AC.



Dans ABC rectangle en A,
d'après le théorème de Pythagore

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$13^2 = 5^2 + AC^2$

$169 = 25 + AC^2$

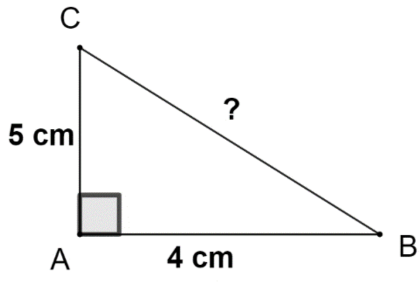
$-25 \quad -25$

$144 = AC^2$

$AC = \sqrt{\mathbf{144}} = \mathbf{12\ cm}$

Exemple avec valeur approchée

Soit ABC un triangle rectangle tel que AB = 4 cm et AC = 5 cm.
Calcule BC.



Dans ABC rectangle en A,
d'après le théorème de Pythagore
$BC^2 = AB^2 + AC^2$
$BC^2 = 4^2 + 5^2$
$BC^2 = 16 + 25$
$BC^2 = 41$
$BC = \sqrt{\mathbf{41}} \approx 6{,}4$ cm

Utilisation de la calculatrice

CASIO FX92	**TI collège**
Pour calculer $6^2 + 8^2$, je tape	
[6] [x^2] [+] [8] [x^2] [EXE]	[6] [x^2] [+] [8] [x^2] [=]

CASIO FX92	**TI collège**
Pour calculer $\sqrt{100}$, je tape	
[SECONDE] [x^2] [1] [0] [0] [EXE]	[SECONDE] [x^2] [1] [0] [0] [=]

Propriété réciproque de Pythagore admise

- Dans un triangle, si le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle est rectangle.
- Soit ABC un triangle.
  Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors le triangle est rectangle et [BC] est l'hypoténuse, le triangle est rectangle en A.

Propriété contraposée de Pythagore admise

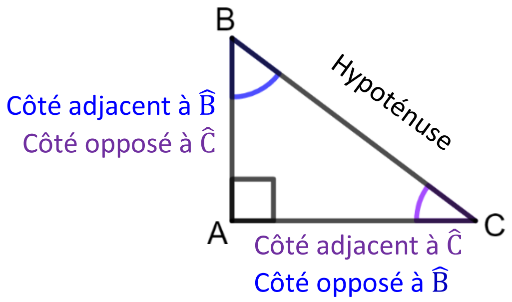
- Dans un triangle, si le carré du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle n'est pas rectangle.
- Soit ABC un triangle.
  Si [BC] est le plus grand côté et $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ alors le triangle n'est pas rectangle.

Exemples

Prouver qu'un triangle est rectangle.	Prouver qu'un triangle n'est pas rectangle.
Soit ABC un triangle tel que AB = 3 cm, BC = 4 cm et AC = 5 cm. *Quelle est la nature de ABC ?*	*Soit ABC un triangle tel que AB = 5 cm, BC = 7 cm et AC = 6 cm.* *Quelle est la nature de ABC ?*
Si ABC était rectangle, l'hypoténuse serait [AC] car c'est le plus grand côté. $\begin{array}{r\|l} AC^2 & AB^2 + BC^2 \\ = 5^2 & = 3^2 + 4^2 \\ = 25 & = 9 + 16 \\ & = 25 \end{array}$ Donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$ donc d'après la propriété réciproque de Pythagore, **ABC est rectangle en B** *(car [AC] est l'hypoténuse)*.	Si ABC était rectangle, l'hypoténuse serait [BC] car c'est le plus grand côté. $\begin{array}{r\|l} BC^2 & AB^2 + AC^2 \\ = 7^2 & = 5^2 + 6^2 \\ = 49 & = 25 + 36 \\ & = 61 \end{array}$ Donc $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ d'après la contraposée de Pythagore alors **ABC n'est pas rectangle**.

II - TRIGONOMETRIE

Définitions



Préliminaire

Dans un triangle rectangle, les rapports suivants ne dépendent que de la mesure de l'angle et non de celles des côtés :

- Côté adjacent à l'angle aigu sur l'hypoténuse
- Côté opposé à l'angle aigu sur l'hypoténuse
- Côté opposé sur côté adjacent du même angle aigu.

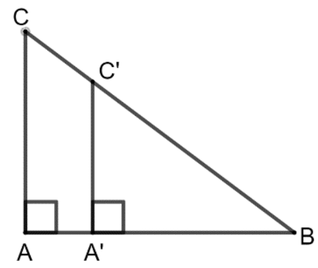
On les appelle respectivement cosinus, sinus et tangente de l'angle aigu.

Démonstration

Comme (A'C') et (AC) sont perpendiculaires à (AB) alors (AC)//(A'C').

Comme (AC)//(A'C') et comme B, A', A et B, C', C sont alignés, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{\mathbf{BA'}}{\mathbf{BA}} = \frac{\mathbf{BC'}}{\mathbf{BC}} = \frac{\mathbf{A'C'}}{\mathbf{AC}}$$



BA' × BC = BC' × BA

÷BC' ÷BC ÷BC' ÷BC

donc $\frac{\mathbf{BA'}}{\mathbf{BC'}} = \frac{\mathbf{BA}}{\mathbf{BC}}$ = cosinus de l'angle $\widehat{B}$

BC' × AC = BC × A'C'

÷BC' ÷BC ÷BC ÷BC'

donc $\frac{\mathbf{AC}}{\mathbf{BC}} = \frac{\mathbf{A'C'}}{\mathbf{BC'}}$ = sinus de l'angle $\widehat{B}$

BA' × AC = BA × A'C'

÷BA' ÷BA ÷BA ÷BA'

donc $\frac{\mathbf{AC}}{\mathbf{BA}} = \frac{\mathbf{A'C'}}{\mathbf{BA'}}$ = tangente de l'angle $\widehat{B}$

Propriété

Dans un triangle rectangle :

- Le cosinus d'un angle aigu est le quotient du côté adjacent à cet angle par l'hypoténuse.
- Le sinus d'un angle aigu est le quotient du côté opposé à cet angle par l'hypoténuse.
- La tangente d'un angle aigu est le quotient du côté opposé à cet angle par son côté adjacent.

⚠ Comment se rappeler des formules ?

Méthode 1 : ♥ **SOHCAHTOA** Sin=Opposé/Hypoténuse Cos=Adjacent/Hypoténuse Tan=Opposé/Adjacent

Méthode 2 : ♥ **CAHSOHTOA** Cos=Adjacent/Hypoténuse Sin=Opposé/Hypoténuse Tan=Opposé/Adjacent

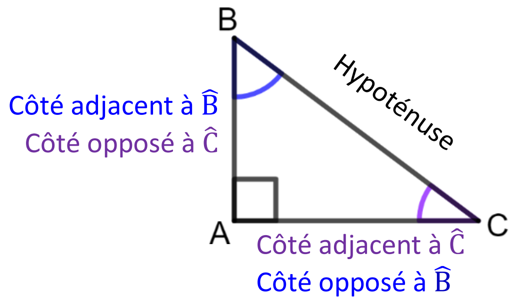
Méthode 3 :

♥ **COS ADJ HYP**	♥ **SIN OPP HYP**	♥ **TANG OPPADJ**
COSinus = ADJacent / HYPoténuse	SINus = OPPosé / HYPoténuse	TANGente = OPPosé / ADJacent

Formules

$$\cos(\hat{B}) = \frac{AB}{BC} \qquad \sin(\hat{B}) = \frac{AC}{BC} \qquad \tan(\hat{B}) = \frac{AC}{AB}$$

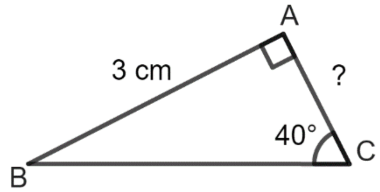
$$\cos(\hat{C}) = \frac{AC}{BC} \qquad \sin(\hat{C}) = \frac{AB}{BC} \qquad \tan(\hat{C}) = \frac{AB}{AC}$$



Exemple de recherche d'un côté

Enoncé

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 3 cm et $\widehat{ACB}$ = 40°.
Calcule AC ; *donne une valeur approchée au centième près.*



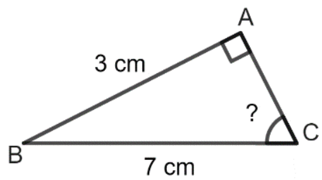
Réponse

Dans ABC rectangle en A	On cite le triangle rectangle
On connait : • $\hat{C}$ • AB : opposé On cherche : • AC : adjacent	On identifie l'angle connu, le côté connu et le côté cherché.
La formule doit contenir opposé et adjacent ; on va utiliser la tangente	On cherche la formule qui comprend ces informations.
$\tan(\hat{C}) = \frac{AB}{AC}$	On écrit la formule avec les « lettres » en veillant bien à placer les numérateurs et dénominateurs au « bon » endroit.
$\tan(40°) = \frac{3}{AC}$	On remplace les valeurs connues
$\frac{\tan(40°)}{1} = \frac{3}{AC}$	On transforme l'écriture pour obtenir deux fractions égales
$AC = \frac{3 \times 1}{\tan(40°)} \approx 3,58 \text{ cm}$	On effectue les produits en croix On donne une valeur approchée On n'oublie pas l'unité

Exemple de recherche d'un angle

Enoncé

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 3 cm et $BC = 7$ cm.
Calcule $\hat{C}$; *donne une valeur approchée au degré près.*



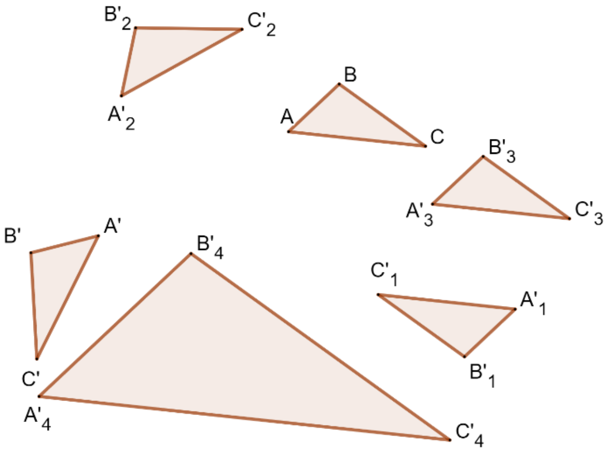
Réponse

Dans ABC rectangle en A $\sin(\hat{C}) = \frac{AB}{BC}$ $\sin(\hat{C}) = \frac{3}{7}$ $\hat{C} = \arcsin\left(\frac{3}{7}\right) \approx 25°$	On cherche : • $\hat{C}$ On connait : • BC : hypoténuse • AB : opposé La formule doit contenir opposé et hypoténuse ; on va utiliser le sinus

Utilisation de la calculatrice

CASIO FX92	
Pour calculer $\frac{3\times1}{\tan(40°)}$, je tape	Pour calculer $\arcsin\left(\frac{3}{7}\right)$, je tape
[fraction] [3] [×] [1] [▼] [tan] [4] [0] [)] [EXE]	[SECONDE] [sin] [3] [÷] [7] [)] [EXE]

III – TRIANGLES SEMBLABLES



Définition

Deux triangles sont *semblables* s'ils ont la même forme, mais pas nécessairement la même taille.

Propriété admise

Deux triangles sont semblables :

- si leurs côtés sont proportionnels

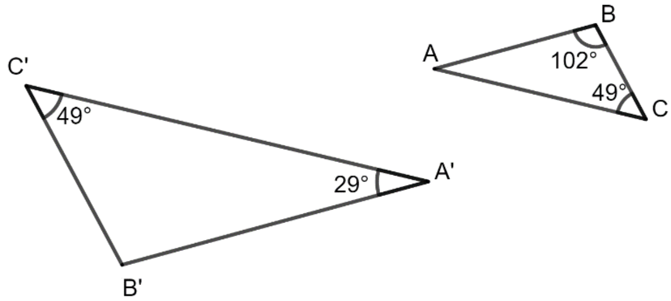
ou

- s'ils ont les mêmes angles.

Remarque

Pour passer entre deux triangles semblables, on peut effectuer une ou plusieurs transformations du plan vues au collège : symétrie axiale, symétrie centrale, translation, rotation ou homothétie.

Exemple 1 : avec des angles



Dans le triangle ABC, on a

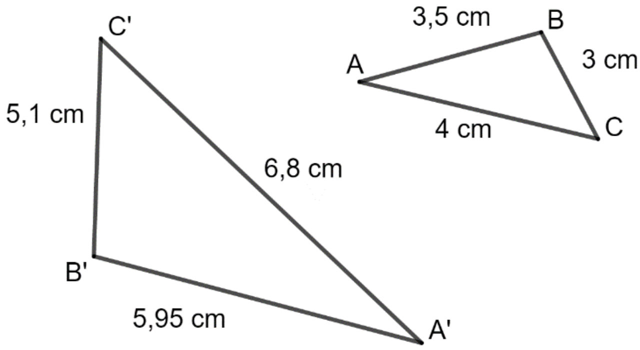
$\mathbf{\widehat{A} = 180 - \left(\widehat{B} + \widehat{C}\right) = 180 - (102 + 49) = 29°}$.

Dans le triangle A'B'C', on a

$\mathbf{\widehat{B'} = 180 - \left(\widehat{A'} + \widehat{C'}\right) = 180 - (49 + 29) = 102°}$.

On a donc $\mathbf{\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}}$ et $\mathbf{\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}}$ et $\mathbf{\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}}$ donc **les triangles ABC et A'B'C' sont semblables**.

Exemple 2 : avec des côtés proportionnels



$$\mathbf{\frac{A'B'}{AB} = \frac{5,95}{3,5} = 1,7}$$

$$\mathbf{\frac{A'C'}{AC} = \frac{6,8}{4} = 1,7}$$

$$\mathbf{\frac{C'B'}{CB} = \frac{5,1}{3} = 1,7}$$

Donc $\mathbf{\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{C'B'}{CB}}$ donc **les triangles ABC et A'B'C' sont semblables**.

IV – RACINES CARREES et RACINES CUBIQUES hors programme en France mais nécessaire en Suisse

Remarque ♥

$2^2 = 4$ $\quad 3^2 = 9$ $\quad 4^2 = 16$ $\quad 5^2 = 25$ $\quad 6^2 = 36$ $\quad 7^2 = 49$

$8^2 = 64$ $\quad 9^2 = 81$ $\quad 10^2 = 100$ $\quad 11^2 = 121$ $\quad 12^2 = 144$ $\quad 13^2 = 169$

$1^3 = 1$ $\quad 2^3 = 8$ $\quad 3^3 = 27$ $\quad 4^3 = 64$ $\quad 5^3 = 125$

$6^3 = 216$ $\quad 7^3 = 343$ $\quad 8^3 = 512$ $\quad 9^3 = 729$ $\quad 10^3 = 1000$

Définitions

La *racine carrée* de a est le nombre **positif** noté $\sqrt{a}$ tel que $\sqrt{a}^2 = a$

La *racine cubique* de a est le nombre noté $\sqrt[3]{a}$ tel que $\sqrt[3]{a}^3 = a$

Remarques sur la racine carrée

$$5 \;\; \begin{matrix} \rightarrow \blacksquare^2 \rightarrow \\ \leftarrow \sqrt{\blacksquare} \leftarrow \end{matrix} \;\; 25$$

$\sqrt{4} = 2$ $\quad \sqrt{9} = 3$ $\quad \sqrt{16} = 4$ $\quad \sqrt{25} = 5$ $\quad \sqrt{36} = 6$ $\quad \sqrt{49} = 7$

$\sqrt{64} = 8$ $\quad \sqrt{81} = 9$ $\quad \sqrt{100} = 10$ $\quad \sqrt{121} = 11$ $\quad \sqrt{144} = 12$ $\quad \sqrt{169} = 13$

La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas.

$\sqrt{-1}$ n'existe pas

$\sqrt{-4}$ n'existe pas

Au lycée, une solution sera proposée pour ces racines carrées : les nombres imaginaires.

Remarques sur la racine cubique

$$5 \;\; \begin{matrix} \rightarrow \blacksquare^3 \rightarrow \\ \leftarrow \sqrt[3]{\blacksquare} \leftarrow \end{matrix} \;\; 125$$

$\sqrt[3]{1} = 1$ $\quad \sqrt[3]{8} = 2$ $\quad \sqrt[3]{27} = 3$ $\quad \sqrt[3]{64} = 4$ $\quad \sqrt[3]{125} = 5$

$\sqrt[3]{216} = 6$ $\quad \sqrt[3]{343} = 7$ $\quad \sqrt[3]{512} = 8$ $\quad \sqrt[3]{729} = 9$ $\quad \sqrt[3]{1000} = 10$

$\sqrt[3]{-1} = -1$ $\quad \sqrt[3]{-8} = -2$ $\quad \sqrt[3]{-27} = -3$ $\quad \sqrt[3]{-64} = -4$ $\quad \sqrt[3]{-125} = -5$

$\sqrt[3]{-216} = -6$ $\quad \sqrt[3]{-343} = -7$ $\quad \sqrt[3]{-512} = -8$ $\quad \sqrt[3]{-729} = -9$ $\quad \sqrt[3]{-1000} = -10$

Propriétés admises

Soient a et b deux nombres positif avec b non nul.

$$\sqrt{a}^2 = a$$

$$\sqrt{a^2} = a$$

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Pour tous les nombres a et b.

$$\sqrt[3]{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{3}} = \boldsymbol{a}$$

$$\sqrt{a^3} = a$$

$$\sqrt[3]{a \times b} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

Exemples de calculs

$\sqrt{5}^2 = 5$

$\sqrt{3^2} = 3$

$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$

$\sqrt{1{,}2}^2 = 1{,}2$

$\sqrt{5{,}2^2} = 5{,}2$

$\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$

$\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{50}} = \sqrt{\frac{200}{50}} = \sqrt{4} = 2$

$\sqrt[3]{7}^3 = 7$

$\sqrt[3]{-8}^3 = -8$

$\sqrt{11^3} = 11$

$\sqrt{(-4)^3} = -4$

$\sqrt[3]{50} \times \sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{50 \times 20} = \sqrt[3]{1000} = 10$

$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \times 2} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$

$\sqrt[3]{\frac{125}{27}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{5}{3}$

$\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{54}{2}} = \sqrt[3]{27} = 3$

Définition

Simplifier une racine s'est transformer une racine en produit d'un entier par une racine d'un nombre dont la distance à zéro est plus petite.

Astuce

Pour simplifier la racine d'un entier, il faut écrire l'entier sous la forme du produit d'un carré (ou cube) par un entier

Exemples de simplification de racines carrées

$\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = \mathbf{5\sqrt{2}}$

$\sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = \sqrt{4} \times \sqrt{4} = \mathbf{2\sqrt{6}}$

$\sqrt{147} = \sqrt{49 \times 3} = \sqrt{49} \times \sqrt{3} = \mathbf{7\sqrt{3}}$

$\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = \mathbf{2\sqrt{5}}$

$\sqrt{72} = \sqrt{4 \times 18} = \sqrt{4} \times \sqrt{18} = 2\sqrt{18} = 2\sqrt{9 \times 2} = 2 \times \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 2 \times 3 \times \sqrt{2} = \mathbf{6\sqrt{2}}$

$\sqrt{72} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{36} \times \sqrt{2} = \mathbf{6\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned} 7\sqrt{50} - 4\sqrt{18} &= 7 \times \sqrt{25 \times 2} - 4 \times \sqrt{9 \times 2} = 7 \times \sqrt{25} \times \sqrt{2} - 4 \times \sqrt{9} \times \sqrt{2} \\ &= 7 \times 5 \times \sqrt{2} - 4 \times 3 \times \sqrt{2} = 35\sqrt{2} - 12\sqrt{2} = \mathbf{23\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Exemples de simplification de racines cubiques

$\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8 \times 4} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{4} = \mathbf{2\sqrt[3]{4}}$

$\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{125 \times 2} = \sqrt[3]{125} \times \sqrt[3]{2} = \mathbf{5\sqrt[3]{2}}$

$$\begin{aligned} 11\sqrt[3]{24} + 7\sqrt[3]{-375} &= 11\sqrt[3]{8 \times 3} + 7\sqrt[3]{-125 \times 3} = 11 \times \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{3} + 7 \times \sqrt[3]{-125} \times \sqrt[3]{3} \\ &= 11 \times 2 \times \sqrt[3]{3} + 7 \times (-5) \times \sqrt[3]{3} = 22\sqrt[3]{3} - 35\sqrt[3]{3} = \mathbf{-13\sqrt[3]{3}} \end{aligned}$$

Remarques

Les racines doivent être simplifiées.

Les calculatrices simplifient automatiquement les racines carrées.

Exemple avec décomposition en produit de facteurs premiers

$31104 = 2^7 \times 3^5$

$$\begin{aligned} \sqrt{31104} = \sqrt{2^7 \times 3^5} &= \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3} \\ &= \sqrt{2^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{3} \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times \sqrt{2} \times 3 \times 3 \times \sqrt{3} \\ &= \mathbf{72\sqrt{6}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{31104} = \sqrt[3]{2^7 \times 3^5} &= \sqrt[3]{2^3 \times 2^3 \times 2 \times 3^3 \times 3^2} \\ &= \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{3^2} \\ &= 2 \times 2 \times \sqrt[3]{2} \times 3 \times \sqrt[3]{3^2} \\ &= \mathbf{12\sqrt[3]{18}} \end{aligned}$$